

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

И.В. Садовничая, Е.В. Хорошилова

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

*Учебное пособие
для студентов университетов*

МАКС ПРЕСС
МОСКВА – 2008

УДК 378(075.8):517.521.3
ББК 22.161я73
С14

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова*

Рецензенты:

академик РАН *Ильин В.А.*, профессор, д.ф.-м.н. *Соколов Н.В.*,
доценты, к.ф.-м.н. *Фоменко Т.Н.*, *Фомичёв В.В.*

Садовничая И.В., Хорошилова Е.В.

С14 **Определённый интеграл: теория и практика вычислений:** Учеб.
пособие для студентов университетов. – М.: Издательский отдел фа-
культета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД №05899 от
24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2008. – 528с.
ISBN 978–5–89407–335–4
ISBN 978–5–317–02464–2

Издание посвящено теоретическим и практическим аспектам *вычисления* определенных интегралов, а также методам их *оценок, свойствам и приложениям* к решению различных геометрических и физических задач. Книга содержит разделы, посвященные методам вычисления собственных интегралов, свойствам несобственных интегралов, геометрическим и физическим приложениям определенного интеграла, а также некоторым обобщениям интеграла Римана – интегралам Лебега и Стильтьеса.

Изложение теоретического материала подкреплено большим количеством (более 220) разобранных примеров вычисления, оценок и исследования свойств определенных интегралов; в конце каждого параграфа приводятся задачи для самостоятельного решения (более 640, подавляющее большинство – с решениями).

Цель пособия – помочь студенту во время прохождения темы «Определенный интеграл» на лекциях и практических занятиях. К нему может обратиться студент для получения справочной информации по возникшему вопросу. Книга также может быть полезна преподавателям и всем желающим изучить данную тему достаточно подробно и широко.

Для студентов университетов, в том числе математических специальностей, изучающих интегральное исчисление в рамках курса математического анализа.

УДК 378(075.8):517.521.3
ББК 22.161я73

ISBN 978–5–89407–335–4
ISBN 978–5–317–02464–2

© Факультет Вычислительной математики
и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008
© Садовничая И.В., Хорошилова Е.В., 2008

Предисловие	8
-------------	---

§ 1. Определённый интеграл Римана

1.1. Историческая справка	11
1.2. Определение интеграла Римана	14
1.2.1. Интегральные суммы и интеграл Римана	14
1.2.2. Вычисление определённых интегралов по определению, т.е. переходом к пределу интегральных сумм	16
1.2.3. Геометрический смысл определённого интеграла	17
1.2.4. Суммы и интегралы Дарбу	18
1.2.5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости	23
1.3. Основные классы интегрируемых функций	24
1.3.1. Функции, непрерывные на сегменте	24
1.3.2. Ограниченные на сегменте функции, множество точек разрыва которых имеет меру нуль по Жордану	25
1.3.3. Ограниченные на сегменте функции, множество точек разрыва которых имеет меру нуль по Лебегу	27
1.3.4. Функции, монотонные на сегменте	27
1.3.5. Интегрирование сложных функций	28
1.4. Свойства определённого интеграла, выражаемые равенствами	31
1.5. Интегралы с переменным верхним (нижним) пределом. Формула Ньютона–Лейбница	35
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения	41

§ 2. Оценки определённых интегралов:

теоремы о среднем, интегральные неравенства

2.1. Свойства определённого интеграла, связанные с неравенствами	53
2.2. Интегральные теоремы о среднем	
2.2.1. Первая теорема о среднем. Среднее значение функции	57
2.2.2. Вторая теорема о среднем	62
2.3. Некоторые известные интегральные неравенства	
2.3.1. Неравенство Коши–Буняковского	65
2.3.2. Неравенство Коши	67
2.3.3. Неравенство Гёльдера	68

2.3.4. Неравенство Минковского	68
2.3.5. Неравенства для выпуклых функций	70
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения	73

§ 3. Основные методы вычисления определённых интегралов

3.1. Интегрирование путём сведения к табличным (или известным) интегралам с помощью различных преобразований	81
3.2. Интегрирование путём замены переменной	89
3.3. Интегрирование по частям	99
3.4. Другие способы вычисления определённых интегралов	105
3.5. Интегрирование специальных классов функций	107
3.5.1. Интегрирование периодических функций	108
3.5.2. Интегрирование функций, график которых имеет ось (центр) симметрии в середине промежутка интегрирования	110
3.5.3. Интегрирование взаимно обратных функций	111
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения	112

§ 4. Несобственные интегралы

4.1. Понятия несобственных интегралов 1-го и 2-го рода и связь между ними. Сходимость (расходимость) интеграла	
4.1.1. Несобственный интеграл 1-го рода	123
4.1.2. Несобственный интеграл 2-го рода	126
4.2. Понятие среднего значения функции на неограниченном промежутке. Сходимость интеграла в смысле главного значения (по Коши)	
4.2.1. Среднее значение функции, интегрируемой на неограниченном промежутке	129
4.2.2. Сходимость в смысле главного значения (по Коши)	130
4.2.3. Среднее значение несобственного интеграла	135
4.3. Критерий Коши сходимости (расходимости) несобственного интеграла	136
4.4. Свойства несобственного интеграла	138
4.5. Теоремы о среднем	146
4.6. Вычисление несобственных интегралов	
4.6.1. Формула Ньютона–Лейбница	147
4.6.2. Формула замены переменной	149
4.6.3. Формула интегрирование по частям	150
4.7. Исследование сходимости несобственных интегралов	153
4.7.1. Необходимые и достаточные условия сходимости интегралов от неотрицательных функций. Теорема сравнения	154
4.7.2. 1-й признак сравнения (признак абсолютной сходимости)	157
4.7.3. 2-й признак сравнения	157
4.7.4. 3-й признак сравнения (признак сравнения со степенью)	162
4.7.5. Признак Дирихле	165

4.7.6. Признак Абеля.	168
4.7.7. Признак Коши.	169
4.7.8. Использование формулы Тейлора при исследовании сходимости интеграла.	171
4.7.9. Абсолютная (условная) сходимость несобственного интеграла.	174
4.8. Другие виды задач, связанных с несобственными интегралами.	181
4.9. Некоторые известные несобственные интегралы.	
1. Интегральные синус и косинус.	183
2. Интеграл Эйлера–Пуассона.	183
3. Интегралы Френеля.	184
4. Интегралы Эйлера.	184
5. Интеграл Дирихле.	184
6. Интегралы Лапласа.	184
7. Гамма- и бета-функции.	184
8. Интегралы Фруллани.	184
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	185
§ 5. Вычисление площади плоской фигуры	
5.1. Плоская фигура и связанные с ней понятия.	190
5.2. Квадрируемая фигура и её площадь.	191
5.3. Необходимые и достаточные условия квадрируемости. Классы квадрируемых фигур.	193
5.4. Площадь в декартовых координатах.	
5.4.1. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана явно.	198
5.4.2. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана параметрически.	207
5.4.3. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$	212
5.5. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.	
5.5.1. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана явно.	217
5.5.2. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана параметрически.	224
5.5.3. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана неявно уравнением $F(r, \varphi) = 0$	225
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	227
§ 6. Вычисление длины дуги кривой	
6.1. Кривая на плоскости и связанные с ней понятия.	231
6.2. Спрямолинейная кривая и длина её дуги.	235
6.3. Основные классы спрямолинейных кривых. Вычисление длины дуги.	
6.3.1. Случай параметрического задания кривой в декартовых координатах.	238
6.3.2. Случай явного задания кривой в декартовых координатах.	251
6.3.3. Случай неявного задания кривой в декартовых координатах.	253
6.3.4. Случай явного задания кривой в полярных координатах.	255
6.3.5. Случай параметрического задания в полярных координатах.	258

6.3.6. Случай неявного задания кривой в полярных координатах.	259
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	260
§ 7. Вычисление объёмов тел	
7.1. Пространственное тело и связанные с ним понятия.	264
7.2. Понятие кубического тела. Объём тела.	267
7.3. Необходимые и достаточные условия кубичности. Классы кубических тел.	270
7.4. Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений.	272
7.5. Объём тела вращения в декартовых координатах.	
7.5.1. Криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox и вращается вокруг оси Ox	278
7.5.2. Криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox и вращается вокруг оси Oy	289
7.5.3. Вращение вокруг оси, не совпадающей ни с одной из координатных осей.	296
7.6. Объём тела вращения в полярных координатах.	
7.6.1. Переход от полярных координат к прямоугольным координатам.	299
7.6.2. Вычисление объёма непосредственно в полярных координатах.	300
7.6.3. Случай вращения вокруг луча $\varphi = \pi/2$	302
7.6.4. Переход от прямоугольных координат к полярным координатам.	303
7.6.5. Случай вращения вокруг произвольной прямой.	305
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	309
§ 8. Вычисление площадей поверхностей вращения	
8.1. Понятие кривой поверхности и способы её задания. Гладкая поверхность. Одно- и двусторонние поверхности.	313
8.2. Алгебраические поверхности 1-го и 2-го порядков.	318
8.3. Квадрируемость кривой поверхности и её площадь.	319
8.4. Поверхность вращения и её площадь.	320
8.5. Площадь поверхности вращения в декартовых координатах.	322
8.5.1. Вращение вокруг оси Ox	322
8.5.2. Вращение вокруг оси Oy	330
8.5.3. Вращение вокруг произвольной оси.	333
8.6. Площадь поверхности вращения в полярных координатах.	338
8.6.1. Вращение вокруг полярной оси.	338
8.6.2. Вращение вокруг прямой, перпендикулярной полярной оси.	340
8.6.3. Вращение вокруг произвольной оси.	340
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	344

§ 9. Физические приложения определённого интеграла	
9.1. Масса плоской кривой.	346
9.2. Статические моменты, моменты инерции и центры тяжести плоских кривых и фигур.	
9.2.1. Случай плоской кривой.	347
9.2.2. Случай плоской фигуры.	353
9.3. Вычисление пути, работы переменной силы и другие примеры простейших физических задач.	362
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	366
§ 10. Мера и интеграл Лебега	
10.1. История вопроса.	369
10.2. Используемые понятия.	
10.2.1. Эквивалентные множества. Операции над множествами.	370
10.2.2. Счётные и несчётные множества.	371
10.2.3. Открытые и замкнутые множества.	372
10.2.4. Числовой ряд и его сумма. Сходимость ряда.	373
10.3. Мера множества.	374
10.4. Измеримые функции.	376
10.5. Интеграл Лебега.	
10.5.1. Определение интеграла Лебега от ограниченной функции.	379
10.5.2. Связь между интегралами Римана и Лебега. Класс интегри- руемых по Лебегу ограниченных функций.	380
10.5.3. Интеграл Лебега как предел лебеговских интегральных сумм. . .	381
10.5.4. Свойства интеграла Лебега.	381
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	385
§ 11. Интеграл Стильтьеса	
11.1. Понятие об интеграле Стильтьеса как линейном функционале на пространстве непрерывных функций.	386
11.2. Функции ограниченной вариации и их свойства. Определение интеграла Стильтьеса.	387
11.3. Условия существования интеграла Стильтьеса.	391
11.4. Свойства интеграла Стильтьеса.	394
Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения.	399
Ответы и решения.	401
Приложение.	523
Предметный указатель.	524
Список использованной литературы	526

Раздел математического анализа, связанный с изучением определённого интеграла, его свойств и приложений, относится к наиболее важным разделам современной математики и традиционно включён в учебную программу основных курсов, изучаемых в высших учебных заведениях.

Существует большое количество учебных пособий и специальной литературы, посвящённых, в том числе, и этой теме (см., например, список используемой литературы). И любой профессионал без труда назовёт ряд изданий, которым он отдаёт предпочтение по глубине и (или) широте охвата изучаемого материала. Эта книга адресована, в первую очередь, именно студенту, впервые изучающему данный раздел.

Особенностью учебного процесса в университете является, как известно, то, что студенту для изучения заданной темы необходимо в весьма короткий срок, отведённый учебной программой, прослушать цикл лекций и посетить соответствующее количество семинарских (практических) занятий, посвящённых этой теме. Удобно, если при этом под рукой имеется учебное пособие, куда можно заглянуть в случае, если что-то оказалось непонятым на лекции, или же возникло затруднение при решении задачи на семинаре или при выполнении домашнего задания. Конечно, преподаватель на семинарах объясняет новый материал, расставляет акценты, и под его руководством учащиеся разбирают решения типовых задач. Но, во-первых, время занятия ограничено, а информационная насыщенность может быть очень плотной, и просто невозможно успеть порой и сформулировать, и доказать все необходимые для решения задач свойства, и разобраться в нюансах и существующих подходах к решению той или иной задачи. Во-вторых (это касается, в первую очередь, студентов математических факультетов, более глубоко изучающих все разделы анализа), на семинаре часто не хватает времени даже для осмысливания уже разобранного решения, не говоря уже о том, чтобы иметь достаточно времени для самостоятельного его поиска. И, конечно, надо учитывать психофизические особенности памяти и умение «схватывать» и тут же применять новый материал, которые естественным образом различаются у различных студентов.

Целью авторов данного пособия являлось написание книги-сопровождения, которая стала бы путеводителем студента в рамках темы «Определённый интеграл». Книга предназначена для активного использова-

ния её студентами *во время прохождения данной темы на лекциях и практических занятиях*. Именно к ней может обратиться студент для получения справочной информации по возникшему вопросу. В эту книгу он может заглянуть, если на лекции остался непонятым какой-либо вопрос, или если возникли сложности при выполнении домашнего задания. Иногда даже хорошо успевающему и способному студенту необходимо подробно разобраться в решении того или иного типа задач, посмотреть, как следует оформлять решение, как правильно его обосновывать. Этим пособием рекомендуем пользоваться в процессе подготовки как к текущим проверочным и контрольным работам, так и при подготовке к предстоящим зачёту и экзамену.

Отличительной особенностью данной книги является то, что она содержит как достаточно полный (включая все необходимые определения и доказательства утверждений по данной теме) теоретический материал, так и служит практическим руководством для решения задач.

В книге рассмотрены основные виды определённых интегралов от функций одного действительного переменного, изучаемые студентами на младших курсах.

В первую очередь, это классический определённый интеграл Римана от ограниченной функции по ограниченному множеству. Сформулированы и доказаны все основные его свойства (§1), включая оценки интегралов при помощи теорем о среднем и известных интегральных неравенств (§2); рассмотрены методы вычисления интеграла Римана (§3).

Один из параграфов (§4) посвящён обобщению понятия интеграла Римана – несобственным интегралам, когда неограниченными являются либо промежуток интегрирования, либо подынтегральная функция. Доказываются свойства несобственных интегралов, теоремы о среднем; исследуется сходимость интегралов (в том числе, абсолютная или условная, в смысле главного значения) с привлечением теоремы сравнения и вытекающих из неё признаков сравнения, а также методы их вычисления. Приводятся с целью первичного ознакомления наиболее известные в классическом анализе несобственные интегралы.

Четыре параграфа освещают вопросы геометрических приложений собственных и несобственных интегралов: вычисление с помощью определённых интегралов площадей плоских фигур в декартовой и полярной системах координат при различных способах задания кривых, ограничивающих эти фигуры (§5); вычисление длин дуг плоских и пространственных кривых (§6); вычисление объёмов тел, включая объёмы тел вращения (§7); вычисление площадей поверхностей тел вращения (§8). Ещё один параграф затрагивает физические приложения определённых интегралов на примерах некоторых известных физических задач (§9).

Наконец, последние два параграфа посвящены интересным дальнейшим обобщениям понятия определённого интеграла на примерах интегралов Лебега (для измеримых ограниченных функций, которые могут быть сделаны непрерывными путём изменения их на множестве сколь угодно малой меры, т.е.

измеримые функции в этом смысле близки к непрерывным функциям (§10) и Стильеса (для функций с ограниченным изменением (§11)).

Каждый параграф иллюстрирован серией разобранных примеров разнообразных типовых задач с подробными комментариями решений для лучшего усвоения процедуры поиска и обоснования решений. Завершается параграф списком контрольных заданий и задач для самостоятельного решения (большинство из которых снабжены подробными решениями или указаниями к ним).

Книга не охватывает некоторые виды определённых интегралов, которые обычно изучаются позже, после ознакомления с теорией функций нескольких действительных переменных. Так, в неё не вошли кратные интегралы, криволинейные интегралы (в которых областью интегрирования служит плоская или пространственная кривая), поверхностные интегралы (т.е. интегралы от функций, заданных в точках некоторой поверхности), а также интегралы, зависящие от параметров. Не рассматриваются по аналогичной причине и интегралы от функций комплексных переменных.

Приносим глубокую благодарность академику В.А.Ильину, автору известных учебников по математическому анализу, за внимательное прочтение рукописи и положительный отзыв о её содержании.

Выражаем также признательность и благодарность авторам используемых при написании данной книги пособий и трудов, всем рецензентам этой книги – за сделанные ценные замечания, а будущим читателям – за возможные замечания и советы по её улучшению.

Надеемся, что наша книга окажется полезной всем тем, кому она адресована.

*С уважением,
авторы.*

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

1.1. Историческая справка

Понятие интеграла и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади любых фигур и поверхностей и объёмы произвольных тел. Предыстория интегрального исчисления восходит к глубокой древности.

Великий греческий математик *Евдокс Книдский* (V–IV века до н.э.) сформулировал первое теоретическое обобщение и обоснование методов вычисления площадей и объёмов, в которых неявно использовались предельные переходы. Метод Евдокса был назван в XVII веке методом исчерпывания. Им пользовались Евклид, Архимед и другие учёные древности. В длинной эволюции, которую на протяжении почти 2500 лет претерпело понятие предела, метод исчерпывания представляет собой первый этап. Евдокс доказал, что разность между площадью круга и площадью вписанного в него правильного многоугольника с числом сторон n может быть сделана меньше произвольного заданного $\varepsilon > 0$. С помощью своего метода Евдокс доказал, что объём пирамиды равен трети объёма призмы с той же высотой и тем же основанием, а объём конуса равен трети объёма соответствующего цилиндра.

Архимед в своих «Началах» с помощью метода исчерпывания доказывает, в частности, теорему о том, что объёмы двух шаров относятся как кубы их радиусов. Сжимая круг радиуса a , Архимед получает эллипс с полуосями a и b и доказывает, что отношение площади эллипса к площади круга выражается отношением малой полуоси к большой и что площадь эллипса равна πab . Метод исчерпывания использовался в XVII–XVIII веках, а в некоторых учебных руководствах и в XIX и в начале XX века.

Ученик Галилея, итальянский математик *Бонавентура Кавальери* (1598–1647) считается основоположником метода неделимых – предшественника метода бесконечно малых. В XVII–XVIII вв. многие из последователей Кавальери, в том числе английский математик *Джон Валлис* (1616–1703) уже явно отождествляют неделимые величины с актуально бесконечно малыми. Именно Валлис, как считают, первым в арифметической форме изложил предельный переход, дав мощный стимул в развитие теории пределов. Он же предложил в 1665 г. использовать символ ∞ для обозначения бесконечности. Метод неделимых использовали *Евангелиста Торричелли* (1608–1647), *Блез*

Паскаль (1623–1662) и другие учёные того времени. Создание этого метода стало одним из важных этапов в развитии интегрального исчисления. Дальнейшее развитие метод пределов получил в трудах *Исаака Ньютона* (1643–1727).

Понятия производной, дифференциала и интеграла, как и весь математический анализ, ныне основываются на разработанном в XIX в. методе пределов, или, что в сущности всё равно, на методе бесконечно малых. В конце XVII века в Европе образовались две крупные математические школы, которые существовали на протяжении почти всего XVIII в. Главой одной из них был крупный немецкий учёный *Готтфрид Вильгельм фон Лейбниц* (1646–1716). Как он сам, так и его ученики и сотрудники – *Гильом Франсуа Лопиталь* (1661–1704), братья *Якоб* (1654–1705) и *Иоганн* (1667–1748) *Бернулли*, а также его непосредственные последователи, в том числе *Леонард Эйлер* (1707–1783), жили и творили в основном на континенте. Вторая школа, предшественниками которой были Валлис и Барроу, возглавляемая Ньютоном, состояла из английских и шотландских учёных. В их числе был и *Колин Маклорен* (1698–1746). Обе школы привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений. В своих трудах Эйлер излагает многочисленные приёмы вычисления не только неопределённых, но и определённых интегралов, применяя и развивая новые методы как, например, интегрирование по параметру, использование разных подстановок (подстановки Эйлера) и др. Он вычислил много труднейших определённых интегралов, например

$$\int_0^1 \frac{(x-1)dx}{\ln x} = \ln 2,$$

важных несобственных интегралов, например,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

и открыл ряд новых важнейших интегралов

(например, бета-функцию $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ и гамма-функцию $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$).

В 1777–78 гг. Л. Эйлер впервые применил к вычислению определённых интегралов функции комплексного переменного. Свой вклад в развитие интегрального и дифференциального исчислений внесли также *Джозеф Луи Лагранж* (1736–1813) и французский учёный и просветитель *Жан Даламбер* (1717–1783). В середине XVIII в. Л. Эйлер и Ж. Лагранж свободно владели двойными и тройными интегралами. Криволинейные интегралы были рассмотрены в 1743 г. в трудах А. Клеро.

В начале XIX в. интегральное исчисление, как и дифференциальное исчисление, было перестроено на новых основаниях. Реформа интегрального исчисления была начата крупным французским математиком *Огюстеном Луи*

Коши (1789–1857). Определённый интеграл, рассматриваемый как предел интегральной суммы, О. Коши выдвинул как одно из важнейших понятий

анализа. При этом он воспользовался символом $\int_a^b f(x)dx$, предложенным

Джозефом Фурье (1768–1830). Именно благодаря Коши этот символ вошёл в общее употребление и сохранился поныне. Термин «определённый интеграл» предложил в 1779 г. П. Лаплас. Коши впервые аналитически доказал существование определённого интеграла у непрерывной функции, а также точно определил простейшие несобственные интегралы для неограниченного промежутка интегрирования и для функций с конечным числом точек разрыва.

Дальнейшие обобщения понятия интеграла, связанные особенно с изучением тригонометрических рядов, были даны *Бернардом Риманом* (1826–1866), *Анри Лебегом* (1875–1941) и др. Б. Риман первый определил необходимые и достаточные условия интегрируемости ограниченной функции. Ему принадлежит общее определение определённого интеграла, поэтому интегральную сумму и стали называть «римановой», хотя по существу это понятие восходит ещё к Архимеду, а в современной форме для случая непрерывной функции им пользовался Коши. А. Лебегу принадлежит обобщение понятия интеграла (интеграл Лебега), основанное на теории меры (мера Лебега) и позволяющее интегрировать чрезвычайно широкий класс функций.

В развитии интегрального исчисления в XIX в. приняли важнейшее участие и русские ученые. Так, М.В. Остроградский предложил оригинальный приём интегрирования рациональных дробей (метод Остроградского), позволяющий алгебраически выделить рациональную часть интеграла (1845). Ему же принадлежат имеющие фундаментальное значение в интегральном исчислении и его приложениях формулы преобразования n -кратных интегралов в $(n-1)$ -кратные. Большое число специальных определённых интегралов вычислил *Н.И. Лобачевский* (1792–1856). Математик *В.Я. Буняковский* (1804–1889) открыл широко применяемое неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx,$$

носящее его имя. Крупнейшие исследования по интегральному исчислению принадлежат П.Л. Чебышёву. Среди них – продолжавшие исследования Н. Абеля и М.В. Остроградского работы об интегрировании в конечном виде некоторых иррациональных функций. В частности, П.Л. Чебышёв доказал, что известные ещё в XVIII в. три случая интегрируемости в конечном виде биномиального дифференциала являются единственными.

Общая теория интеграла связана с развитием теории множеств и теории функций действительного переменного.

1.2. Определение интеграла Римана¹

1.2.1. Интегральные суммы и интеграл Римана

Пусть дан сегмент $[a, b]$ ($a < b$). Конечное числовое множество $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ назовём (*неразмеченным*) *разбиением* сегмента $[a, b]$, если $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ($n \in N$).

Разбиение T' называется *измельчением* разбиения T , если $T \subset T'$ (т.е. T' содержит все те же точки, что и T , и, возможно, ещё какие-то).

Разбиение T называется *объединением* разбиений T_1 и T_2 , если $T = T_1 \cup T_2$.

Замечание. Если $T = T_1 \cup T_2$, то T – измельчение T_1 , и T – измельчение T_2 .

Зафиксируем некоторое разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$. Обозначим длину k -го сегмента разбиения $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Величина $\Delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ называется *диаметром* разбиения T .

Выберем на каждом из сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ точку $\xi_k : x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Совокупность точек $V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ назовём *размеченным разбиением* сегмента $[a, b]$. Неразмеченное разбиение T , соответствующее разбиению V , будем обозначать $T(V)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$. Сумма

$$\sigma(V) = \sigma(T, \xi) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется *интегральной суммой (Римана)* функции $f(x)$, соответствующей размеченному разбиению V .

Действительное число I называется *определённым интегралом Римана* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если это число является пределом интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю (причём значение предела не зависит от выбора размеченного разбиения), т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для произвольного размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$ с диаметром $\Delta_V < \delta$, выполнено:

¹ Бернард Риман – немецкий математик (1826–1866).

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon \left(\left| I - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon \right).$$

Обозначение: $I = \int_a^b f(x) dx$. При этом $f(x) dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, $[a, b]$ – *сегментом (промежутком) интегрирования*. Число a называется *нижним*, а b – *верхним пределами интегрирования*.

Если функция $f(x)$ определена в точке a , то по определению будем полагать

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Если $a < b$ и $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то по определению

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Функция $f(x)$, для которой существует определенный интеграл Римана, называется *интегрируемой (по Риману, или в собственном смысле) на сегменте $[a, b]$* . Обозначение: $f(x) \in R[a, b]$.

Докажем корректность приведённого определения.

Теорема 1 (единственность интеграла Римана). Если существуют два числа I_1, I_2 , удовлетворяющие данному выше определению интеграла, то

$$I_1 = I_2.$$

Доказательство (от противного). Пусть $I_1 \neq I_2$. Предположим, ради определённости, что $I_1 < I_2$, и обозначим $\varepsilon = \frac{I_2 - I_1}{2} > 0$. Тогда, по определению, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_V < \delta$, выполняется: $|I_1 - \sigma(V)| < \varepsilon$, $|I_2 - \sigma(V)| < \varepsilon$. Значит,

$$I_2 - I_1 = |I_2 - I_1| \leq |I_2 - \sigma(V)| + |I_1 - \sigma(V)| < 2\varepsilon = I_2 - I_1.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Теорема 2 (необходимое условие интегрируемости). Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$. Тогда $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство (от противного). Предположим, что $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a, b]$. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ с диаметром $\Delta_T < \delta$. По условию, найдётся сегмент разбиения $[x_{r-1}, x_r]$, на котором $f(x)$ не ограничена. Пусть $M > 0$ – произвольное (сколь угодно большое) число, $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n$ – любые числа, удовлетворяющие условиям $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Обозначим

$$A = \left| \sum_{k=1, k \neq r}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right|.$$

Так как $f(x)$ не ограничена на сегменте $[x_{r-1}, x_r]$, то существует точка $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ такая, что $|f(\xi_r)| > \frac{M + A}{\Delta x_r}$. Тогда получим, что для любого $M > 0$ и для любого $\delta > 0$ существует $V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ – размеченное разбиение сегмента $[a, b]$, $\Delta_V < \delta$, такое, что

$$|\sigma(V)| \geq \left| f(\xi_r) \Delta x_r - \sum_{k=1, k \neq r}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| > \frac{M + A}{\Delta x_r} \Delta x_r - A = M.$$

Это означает, что множество интегральных сумм $\sigma(V)$, удовлетворяющих условию $\Delta_V < \delta$, не ограничено при любом $\delta > 0$. Получили противоречие с существованием интеграла Римана. Теорема доказана.

Следствие. Неограниченная на сегменте $[a, b]$ функция не интегрируема по Риману на этом сегменте.

1.2.2. Вычисление определённых интегралов по определению, т.е. переходом к пределу интегральных сумм

Подчёркнём, что этот способ активно применялся как основной способ вычисления интегралов в то время, когда ещё не была известна формула Ньютона–Лейбница. В настоящее время данный способ практически не используется, сохранив, тем не менее, своё важное теоретическое значение.

Для того чтобы воспользоваться им, необходимо предварительно убедиться в интегрируемости функции $f(x)$ на заданном сегменте $[a, b]$. Тогда

для вычисления интеграла достаточно будет рассмотреть лишь одно из бесконечного числа возможных разбиений. Затем производится некоторое «удобное» для данной функции на данном сегменте разбиение его на n частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Отметим, что, вообще говоря, не всегда наиболее подходящим бывает разбить сегмент $[a, b]$ на равные части. Общих рекомендаций для выбора разбиения не существует. В каждом конкретном случае следует учитывать специфику подынтегральной функции, её поведение на промежутке интегрирования.

Далее осуществляется выбор промежуточных точек ξ_k на каждом элементарном сегменте разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, в качестве которых часто берут левые или правые концы этих сегментов, их середины и т.п. Точки x_k и ξ_k следует выбирать из расчёта, чтобы полученная в результате интегральная сумма была наиболее простой с точки зрения последующего вычисления от неё предела. Далее составляется интегральная сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

и, наконец, вычисляется её предел (условие $\Delta_V \rightarrow 0$ при этом заменяется на $n \rightarrow +\infty$):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Полученное в результате число и есть искомое значение определённого интеграла.

1.2.3. Геометрический смысл определённого интеграла

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху дугой AB графика непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу – сегментом $[a, b]$ оси Ox , слева и справа – отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ соответственно.

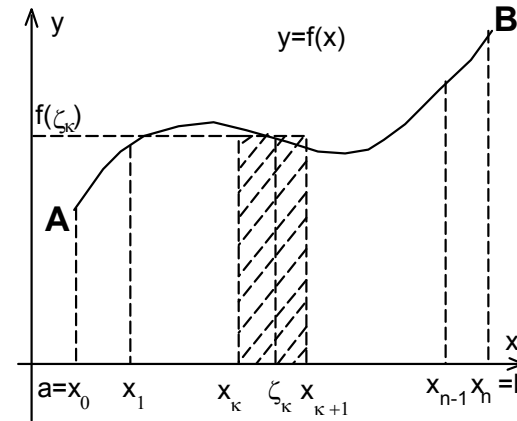
Произведём разбиение этого сегмента произвольными точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

на n частичных сегментов, $k = 1, 2, \dots, n$, выберем на каждом таком сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и составим интегральную сумму

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Геометрический смысл произведения $f(\xi_k) \Delta x_k$ есть площадь элементарного прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Поэтому геометрический смысл интегральной суммы – это сумма площадей всех таких прямоугольников.



Если теперь устремить диаметр разбиения к нулю, то число точек деления будет неограниченно увеличиваться, и в силу интегрируемости непрерывной функции на сегменте $[a, b]$ в пределе получим площадь указанной выше криволинейной трапеции, т.е. численно искомая площадь трапеции S равна определённому интегралу:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

1.2.4. Суммы и интегралы Дарбу²

Наряду с римановыми существуют и другие виды интегральных сумм.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Обозначим

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x), \quad m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x),$$

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x),$$

где $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – некоторое разбиение сегмента $[a, b]$.

Верхней (нижней) суммой Дарбу функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, отвечающей разбиению $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$, называется сумма

$$S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad \left(s(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \right).$$

² Гастон Дарбу – французский математик (1842–1917).

Число $I^* = \inf_T \{S(T)\}$ ($I_* = \sup_T \{s(T)\}$) называют *верхним (нижним) интегралом Дарбу* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ (здесь точная верхняя и нижняя грани берутся по всем возможным разбиениям T сегмента $[a, b]$).

Докажем некоторые свойства сумм и интегралов Дарбу.

Лемма 1. Для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$ имеет место неравенство:

$$s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V)).$$

Доказательство. Поскольку для любого $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, справедливо неравенство $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$, то, умножив его на Δx_k и просуммировав затем по всем k , получим

$$\sum_{k=1}^n \Delta x_k m_k \leq \sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi_k) \leq \sum_{k=1}^n \Delta x_k M_k.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ справедливо:

$$S(T) = \sup_{V(T)} \{\sigma(V)\}, \quad s(T) = \inf_{V(T)} \{\sigma(V)\},$$

где точная нижняя и верхняя грани берутся по всем возможным размеченным разбиениям V , отвечающим разбиению T .

Доказательство. Пусть $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Так как $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, то

найдётся точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ такая, что $f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k > \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = S(T) - \varepsilon,$$

поскольку сумма длин всех частичных отрезков разбиения равна длине исходного сегмента. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся V – размеченное разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $\sigma(V) > S(T) - \varepsilon$. Однако из леммы 1 следует, что $\sigma(V) \leq S(T)$ для любого размеченного разбиения V . Следовательно, $S(T) = \sup_V \{\sigma(V)\}$.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – разбиение сегмента $[a, b]$, $T' = \{x_0; x_1; \dots; x_n; x'_1; \dots; x'_l\}$ – измельчение разбиения T . Тогда

$$S(T') \leq S(T), \quad s(T') \geq s(T),$$

причём $S(T) - S(T') \leq l(M - m)\Delta_T$, $s(T') - s(T) \leq l(M - m)\Delta_T$.

Доказательство. Пусть $T' = \{x_0; x_1; \dots; x_n; x'_1\}$, где $x' \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда k -е слагаемое в сумме для $S(T)$ имеет вид: $M_k \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, а соответствующее слагаемое в сумме для $S(T')$: $(x' - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x) + (x_k - x') \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x)$; все остальные слагаемые в этих суммах совпадают. Так как $\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x) \leq M_k$, $\sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x) \leq M_k$, то $S(T') \leq S(T)$. С другой стороны,

$$S(T) - S(T') \leq M_k \Delta x_k - ((x' - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x) + (x_k - x') \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x)) \leq (M - m) \Delta x_k \leq (M - m) \Delta_T,$$

поскольку $M_k \leq M$, $\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x) \geq m$, $\sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x) \geq m$. Значит, при добавлении одной точки верхняя сумма Дарбу уменьшится не более чем на $(M - m)\Delta_T$. Тогда при добавлении l точек она уменьшится не более чем на $l(M - m)\Delta_T$ (так как диаметр разбиения при измельчении может только уменьшиться).

Утверждение для нижней суммы Дарбу доказывается аналогично.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть T_1, T_2 – произвольные разбиения сегмента $[a, b]$. Тогда $s(T_1) \leq S(T_2)$.

Доказательство. Обозначим $T_3 = T_1 \cup T_2$. Тогда T_3 – измельчение и для T_1 , и для T_2 . Значит, $s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2)$ (последняя цепочка неравенств вытекает из предыдущей леммы и из леммы 1).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, то для неё существуют верхний I^* и нижний I_* интегралы Дарбу, причём для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ выполнено:

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Доказательство. Докажем существование интегралов Дарбу. По условию, $\exists M : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ имеем

$$s(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta x_k = M(b-a).$$

Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху, а, следовательно, у него существует точная верхняя грань. Аналогично доказывается существование точной нижней грани у множества верхних сумм Дарбу.

Перейдём к доказательству неравенств. Так как $I^* = \inf_T \{S(T)\}$, то $I^* \leq S(T)$. Аналогично $s(T) \leq I_*$. Покажем, что $I_* \leq I^*$. Предположим, что это не так. Обозначим $\varepsilon = \frac{I^* - I_*}{2} > 0$. Тогда существует T_1 – разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $S(T_1) < I^* + \varepsilon = \frac{I^* + I_*}{2}$, и существует T_2 – разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $s(T_2) > I_* - \varepsilon = \frac{I^* + I_*}{2}$. Отсюда $s(T_2) > S(T_1)$, что противоречит лемме 4. Значит, сделанное предположение неверно, и $I_* \leq I^*$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Нижний (верхний) интегралы Дарбу являются пределами соответственно нижней (верхней) интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю:

$$I_* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} s(T) \quad (I^* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T)),$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого T – разбиения сегмента $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$, выполнено:

$$|s(T) - I_*| < \varepsilon \quad (|S(T) - I^*| < \varepsilon).$$

Доказательство. Докажем, что $I^* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T)$.

Пусть $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Если $M = m$, то $f(x) = M = m$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда для произвольного разбиения T имеет место равенство:

$$S(T) = M(b-a) = I^*,$$

и лемма доказана.

Пусть теперь $M > m$. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Так как $I^* = \inf_T \{S(T)\}$,

то существует разбиение $T^* = \{x_0^*; x_1^*; \dots; x_k^*\}$ такое, что $S(T^*) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$.

Обозначим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$$

(заметим, что выбор числа δ зависит только от ε , поскольку k – число точек разбиения T^* , а оно выбирается в зависимости от ε).

Пусть $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$. Тогда $T' = \{x_0; x_1; \dots; x_n; x_1^*; \dots; x_{k-1}^*\}$ – измельчение T (добавили к T точки разбиения T^*). Из леммы 3 вытекает следующая цепочка неравенств:

$$0 \leq S(T) - S(T') \leq (k-1)(M-m)\Delta_T < (k-1)(M-m)\delta = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Так как разбиение T' является измельчением и для разбиения T^* , то по лемме 5 получаем $I^* \leq S(T') \leq S(T^*)$. Тогда, по построению разбиения T^* , имеем:

$$0 \leq S(T') - I^* \leq S(T^*) - I^* < \varepsilon/2. \quad (2)$$

Сложив неравенства (1) и (2), получим, что

$$0 \leq S(T) - S(T') + S(T') - I^* < \varepsilon.$$

Таким образом, доказали, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_T < \delta$, выполнено: $0 \leq S(T) - I^* < \varepsilon$. Это означает, по определению, что $I^* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T)$.

Утверждение для нижнего интеграла Дарбу доказывается аналогично. Лемма 6 доказана.

1.2.5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости

Теорема 3 (критерий Римана интегрируемости функции на сегменте). Пусть функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся T – разбиение $[a, b]$ – такое, что

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$.

1) *Необходимость.* Пусть $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Тогда, по определению интеграла, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$, $\Delta_V < \delta$, выполнено: $|I - \sigma(V)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (здесь $I = \int_a^b f(x)dx$). Последнее неравенство перепишем в виде:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

Пусть неразмеченное разбиение T соответствует разбиению V , тогда $\Delta_T < \delta$. Так как $s(T) = \inf_V \{\sigma(V)\}$, $S(T) = \sup_V \{\sigma(V)\}$ (см. лемму 2), то из неравенства (3) следует, что

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}, \quad I - \frac{\varepsilon}{3} \leq S(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

(если все элементы множества лежат на некотором сегменте, то точные грани этого множества также принадлежат рассматриваемому сегменту). Отсюда получаем, что

$$|S(T) - s(T)| \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

2) *Достаточность.* Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение T сегмента $[a, b]$ такое, что $|S(T) - s(T)| < \varepsilon$. Так как $s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T)$ (лемма 5), то $I^* - I_* < \varepsilon$. Поскольку ε – произвольное число, а значения верхнего и нижнего интегралов Дарбу от него не зависят, то последнее неравенство означает, что $I^* = I_*$. Обозначим $I = I^* = I_*$.

Поскольку $I_* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} s(T)$, $I^* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T)$ (лемма 6), то получаем, что

$\lim_{\Delta_T \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0$. Это означает по определению предела, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$, выполнено: $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Значит, для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$, $\Delta_V < \delta$, выполнено:

$$S(T(V)) - s(T(V)) < \varepsilon. \quad (4)$$

Поскольку $s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V))$ (лемма 1) и $s(T(V)) \leq I \leq S(T(V))$ (лемма 5), то из (4) получим, что $|I - \sigma(V)| < \varepsilon$ для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$, $\Delta_V < \delta$. Мы доказали, что $I = \lim_{\Delta_V \rightarrow 0} \sigma(V)$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. Теорема полностью доказана.

1.3. Основные классы интегрируемых функций

1.3.1. Функции, непрерывные на сегменте

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, тогда она равномерно непрерывна на этом сегменте (теорема Кантора). Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Тогда найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, то для любых точек ξ', ξ'' из сегмента $[a, b]$, $|\xi' - \xi''| < \delta$, выполнено:

$$|f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[a, b]$, удовлетворяющее условию $\Delta_T < \delta$. Тогда для любого натурального числа k , $1 \leq k \leq n$, справедливы неравенства $|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (так как $f(x)$ непрерывна на любом сегменте разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, то она достигает на нём своих точных граней, значит, существуют точки $\xi'_k, \xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$, для которых $f(\xi'_k) = M_k$, $f(\xi''_k) = m_k$). Отсюда следует, что для разности

верхней и нижней сумм Дарбу функции $f(x)$, соответствующих разбиению T , справедлива оценка

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon.$$

Согласно критерию Римана интегрируемости функции на сегменте, это означает, что $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Теорема доказана.

1.3.2. Ограниченные на сегменте функции,

множество точек разрыва которых имеет меру нуль по Жордану

Говорят, что интервал (x', x'') покрывает точку x , если $x \in (x', x'')$.

Числовое множество X называется *множеством меры нуль по Жордану*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная система интервалов, покрывающих все точки множества X , причём сумма длин этих интервалов меньше ε ,

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Если множество точек разрыва $f(x)$ на $[a, b]$ имеет меру нуль по Жордану, то функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Если $M = m$, то $f(x) = M = m$ для любой точки $x \in [a, b]$, и функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ (теорема 1).

Пусть $M > m$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть $(x'_1, x''_1), \dots, (x'_l, x''_l)$ – интервалы, покрывающие все точки разрыва функции $f(x)$ на $[a, b]$, причём $\sum_{k=1}^l (x''_k - x'_k) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ (возможно, что $x'_1 < a$, $x''_l > b$).

Обозначим $I = [a, b] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^l (x'_k, x''_k) \right)$. Тогда $I = \bigcup_{m=1}^r I_m$, где $I_m \subset [a, b]$ – сегменты, причём $r \leq l+1$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте I_m для любого m , $1 \leq m \leq r$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на I_m . Значит, существует число $\delta_m > 0$ такое, что для любых точек ξ', ξ'' из сегмента I_m , удовлетворяющих условию $|\xi' - \xi''| < \delta_m$, выполнено:

$|f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $\delta = \min_{1 \leq m \leq r} \delta_m$, T_m – разбиение сегмента I_m ,

$\Delta_{T_m} < \delta$. Тогда $T = \bigcup_{m=1}^r T_m$ – разбиение сегмента $[a, b]$. Пусть

$T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ (перенумеровали точки разбиения T). Тогда для разности верхней и нижней сумм Дарбу, соответствующих разбиению T , справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S(T) - s(T) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset I} (M_k - m_k) \Delta x_k + \\ &+ \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b] \setminus I} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset I} \Delta x_k + \\ &+ (M - m) \sum_{k=1}^l (x''_k - x'_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(так как $\sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset I} \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$, $\sum_{k=1}^l (x''_k - x'_k) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$,

$M_k \leq M$, $m_k \geq m$). Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$ и имеет на нём конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a, b]$.

Следствие 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга только в конечном числе точек, то они одновременно интегрируемы или нет в смысле Римана на $[a, b]$, и если интегрируемы, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Итак, ограниченные функции, имеющие конечное число точек разрыва на некотором сегменте, всегда интегрируемы на этом сегменте. Более того, можно привести пример функции, имеющей бесконечное число точек разрыва, которые, однако, удаётся покрыть конечным числом интервалов сколь угодно малой суммарной длины (см., например, задачу 14). Согласно теореме 2, такие функции также интегрируемы на конечном сегменте (в более общем виде утверждение сформулировано в задаче 42).

Возникает вопрос: как «много» точек разрыва может иметь ограниченная функция, чтобы быть интегрируемой?

Окончательный ответ на этот вопрос даёт теорема 3 следующего пункта.

1.3.3. Ограниченные на сегменте функции, множество точек разрыва которых имеет меру нуль по Лебегу

Числовое множество X называется *множеством меры нуль (по Лебегу)*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная или счётная система интервалов, покрывающих все точки множества X , причём сумма длин этих интервалов меньше ε .

Приведём без доказательства теорему, отражающую необходимые и достаточные условия интегрируемости функции на заданном сегменте (по Риману).

Теорема 3 (критерий Лебега интегрируемости функции). Функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.

Доказательство этого факта можно найти, например, в книге [1] (глава VIII, §7).

Следствие. Можно показать, что любое счётное числовое множество имеет меру нуль по Лебегу. Таким образом, функции, ограниченные и имеющие на некотором сегменте счётное число точек разрыва, всегда интегрируемы на этом сегменте³.

1.3.4. Функции, монотонные на сегменте

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на сегменте $[a, b]$. Тогда она интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Будем считать для определённости, что $f(x)$ не убывает на $[a, b]$ (случай, когда $f(x)$ не возрастает, рассматривается аналогично). Если $f(a) = f(b)$, то $f(x) = f(a) = f(b)$ для любой точки x из $[a, b]$, и $f(x)$ интегрируема. Пусть $f(a) < f(b)$. Выберем произвольное

число $\varepsilon > 0$ и обозначим $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Пусть $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k <$$

³ Более того, существуют числовые множества мощности континуум, имеющие лебегову меру нуль (например, так называемое множество Кантора). Значит, множество точек разрыва интегрируемой функции может иметь мощность континуум.

$$\begin{aligned} < \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta (f(x_1) - f(a) + f(x_2) - \\ & - f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(b) - f(x_{n-1})) = \\ & = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Значит, функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Теорема доказана.

1.3.5. Интегрирование сложных функций

Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[a, b]$, если существует константа $C > 0$ такая, что для любых значений $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполнено:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C |x_1 - x_2|$$

(при этом C называется *константой Липшица*).

Замечание 1. Очевидно, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[a, b]$, то она непрерывна на этом сегменте.

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Пусть функция $\varphi(y)$ определена на сегменте $[m, M]$ и удовлетворяет на нём условию Липшица. Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то существует такое разбиение

$T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[a, b]$, что $S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{C}$, где $S(T)$ и $s(T)$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $f(x)$, соответствующие разбиению T , а C – постоянная из условия Липшица для функции $\varphi(y)$. Пусть $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$,

$$M_k^* = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \varphi(f(x)), \quad m_k^* = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \varphi(f(x)).$$

Тогда для любых двух точек $\xi_1, \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k]$ справедливы неравенства:

$$\varphi(f(\xi_1)) - \varphi(f(\xi_2)) \leq |\varphi(f(\xi_1)) - \varphi(f(\xi_2))| \leq$$

$$\leq C|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C(M_k - m_k).$$

Поскольку точки ξ_1, ξ_2 выбираются произвольно, последнее неравенство означает, что $M_k^* - m_k^* \leq C(M_k - m_k)$. Тогда

$$S^*(T) - s^*(T) = \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq C \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

где $S^*(T)$ и $s^*(T)$ – соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $\varphi(f(x))$. Таким образом, разность между верхней и нижней суммами Дарбу функции $\varphi(f(x))$, соответствующими разбиению T , меньше ε . Это означает, что данная функция интегрируема на сегменте $[a, b]$. Теорема доказана.

Справедливо и более общее утверждение.

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Пусть функция $\varphi(t)$ определена на сегменте $[m, M]$ и непрерывна на нём. Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Пусть $C = \max_{m \leq t \leq M} |\varphi(t)|$.

Положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b - a + 2C}$. Так как функция $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на сегменте $[m, M]$, то существует такое число $\delta > 0$, что $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon_1$, если $|t_1 - t_2| < \delta$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\delta < \varepsilon_1$.

Так как функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует такое разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[a, b]$, что $S(T) - s(T) < \delta^2$, где $S(T)$ и $s(T)$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $f(x)$, соответствующие разбиению T .

Пусть $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $M_k^* = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \varphi(f(x))$, $m_k^* = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \varphi(f(x))$. Разобьём множество целых чисел $\{1; 2; \dots; n\}$ на два множества A и B следующим образом: число $k \in A$, если $M_k - m_k < \delta$; число $k \in B$, если $M_k - m_k \geq \delta$. Тогда для всех $k \in A$ в силу равномер-

ной непрерывности функции $\varphi(t)$ имеем: $M_k^* - m_k^* \leq \varepsilon_1$. Если же $k \in B$, то, очевидно, $M_k^* - m_k^* \leq 2C$.

Пусть $S^*(T)$ и $s^*(T)$ – соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $\varphi(f(x))$. Тогда

$$S^*(T) - s^*(T) = \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k = \sum_{k \in A} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k + \sum_{k \in B} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq \varepsilon_1(b - a) + 2C \sum_{k \in B} \Delta x_k.$$

Оценим отдельно величину $\sum_{k \in B} \Delta x_k$. Так как в силу построения множества B имеем:

$$\delta \sum_{k \in B} \Delta x_k \leq \sum_{k \in B} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = S(T) - s(T) < \delta^2, \\ \text{то } \sum_{k \in B} \Delta x_k < \delta.$$

Значит,

$$S^*(T) - s^*(T) \leq \varepsilon_1(b - a) + 2C\delta < \varepsilon_1(b - a + 2C) = \varepsilon.$$

Таким образом, разность между верхней и нижней суммами Дарбу функции $\varphi(f(x))$, соответствующими разбиению T , меньше ε . Это означает, что данная функция интегрируема на сегменте $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Композиция двух интегрируемых функций не обязательно будет интегрируема. Например, пусть $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}, x \in [0, 1]$;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное} \\ 1/n, & x = m/n - \text{рациональное} \end{cases}, x \in (0, 1]; f(0) = 1$$

(так определённая функция $f(x)$ называется функцией Римана. Для неё $M = 1, m = 0$). Тогда

$$\varphi(f(x)) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное} \\ 1, & x - \text{рациональное} \end{cases}$$

– функция Дирихле. Очевидно, что $\varphi(x) \in R[0, 1]$ (она ограничена и имеет

одну точку разрыва на этом сегменте). Функция $f(x)$ также интегрируема на $[0,1]$ (см. задачу 17). Однако их композиция – функция Дирихле – не является интегрируемой на сегменте $[0,1]$ (см. задачу 19).

1.4. Свойства определённого интеграла, выражаемые равенствами ⁴

1. Линейность интеграла.

1.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a,b]$. Тогда их сумма и разность также интегрируемы на этом сегменте, причём

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для любого размеченного разбиения

$V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ сегмента $[a,b]$ справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k.$$

Отсюда предельным переходом получаем требуемое утверждение.

1.2. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a,b]$, то и функция $c \cdot f(x)$ ($c \in R$ – произвольная константа) интегрируема на $[a,b]$, причём

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство этого факта вытекает из соответствующего свойства сумм

$$\sum_{k=1}^n cf(\xi_k)\Delta x_k = c \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Следствие. Линейная комбинация $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x)$ интегрируемых на $[a,b]$

функций $f_k(x)$, $\alpha_k \in R$, $k = 1, 2, \dots, n$, является интегрируемой функцией, причём

⁴ Свойства определённого интеграла, связанные с неравенствами, рассматриваются ниже в параграфе 2, посвящённом оценкам интегралов.

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f_k(x) dx.$$

Замечание 1. Сумма интегрируемой и неинтегрируемой функций есть функция неинтегрируемая.

Действительно, пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a,b]$, а функция $g(x)$ – нет. Предположим, что их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на $[a,b]$. Тогда функцию $g(x)$ можно представить в виде разности двух интегрируемых функций:

$$g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x).$$

Но это означает, согласно свойству 1.1, что и сама функция $g(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Замечание 2. Сумма двух неинтегрируемых функций может, вообще говоря, быть интегрируемой функцией.

Рассмотрим, например, функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x - \text{рационально,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$$

Их сумма $f(x) + g(x) \equiv 0$ и, следовательно, интегрируема на любом сегменте $[a,b]$, в то время как каждая из этих функций (типа Дирихле) в отдельности – не интегрируема ни на каком сегменте.

2. *Интегрируемость произведения.* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируемо на $[a,b]$.

Доказательство. Докажем сначала, что из того, что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, следует, что $f^2(x)$ также интегрируема. Действительно, функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, а функция $\varphi(x) = x^2$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[m, M]$, где $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$,

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \quad (|x^2 - y^2| \leq 2 \max\{|m|, |M|\} \cdot |x - y|).$$

Значит, функция $\varphi(f(x)) = f^2(x)$ интегрируема на $[a,b]$ по теореме 5 об интегрируемости сложной функции.

Пусть теперь функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$. Тогда из соотношения

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$$

и свойства 1.1 следует, что и функция $(f(x) \cdot g(x))$ является интегрируемой по Риману на этом сегменте.

Замечание 3. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из интегрируемости произведения двух функций отнюдь не следует интегрируемости каждой из них в отдельности.

В самом деле, возьмём функции

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально,} \\ -1, & \text{если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$$

Функция $f(x) \cdot g(x) \equiv 1$, равная их произведению, интегрируема на любом сегменте, в отличие от каждой из них.

Замечание 4. Если одна из функций интегрируема на некотором сегменте, а другая – нет, то их произведение может быть как неинтегрируемым, так и интегрируемым на этом сегменте.

В качестве примера последней из ситуаций можно рассмотреть пару функций

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально,} \end{cases} \text{ и } g(x) \equiv 0$$

на произвольном сегменте.

3. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, и $[c, d] \subseteq [a, b]$ ($a \leq c < d \leq b$). Тогда $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[c, d]$.

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[a, b]$, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_l < c < x_{l+1} < \dots < x_m < d \leq x_{m+1} < \dots < x_n = b$; $T' = T \cup \{c; d\}$ – измельчение разбиения T . Тогда

$$S(T') - s(T') \leq S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

С другой стороны, $T'' = \{c; x_{l+1}; \dots; x_m; d\}$ – разбиение сегмента $[c, d]$, причём $S(T'') - s(T'') \leq S(T') - s(T') < \varepsilon$ (поскольку $S(T') - s(T') =$

$= S(T') - s(T') + \sum_{[x_{k-1}, x_k] \not\subseteq [c, d]} (M_k - m_k) \Delta x_k$ и второе слагаемое в сумме не-

отрицательно). Согласно критерию Римана интегрируемости функции на сегменте, это означает, что $f(x)$ интегрируема на сегменте $[c, d]$.

4. Аддитивность интеграла. Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом из двух смежных сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на их объединении – сегменте $[a, b]$, причём

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Доказательство. Докажем интегрируемость. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть T' и T'' – разбиения сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, соответственно, такие, что $S(T') - s(T') < \varepsilon/2$, $S(T'') - s(T'') < \varepsilon/2$. Пусть $T = T' \cup T''$. Очевидно, что T – разбиение сегмента $[a, b]$, причём $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Это означает, что $f(x) \in R[a, b]$.

Докажем равенство (1). Пусть $V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ – размеченное разбиение сегмента $[a, b]$, содержащее точку c в качестве одной из точек разбиения x_k . Тогда

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, c]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subseteq [c, b]} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Заметим, что при стремлении диаметра разбиения к нулю левая часть стремится к $\int_a^b f(x) dx$ (поскольку этот интеграл существует); первое слагае-

мое в правой части стремится к $\int_a^c f(x) dx$, второе – к $\int_c^b f(x) dx$.

Утверждение доказано.

Следствие. Пусть $f(x) \in R[A, B]$ и точки a, b, c лежат на сегменте $[A, B]$ (неважно, в каком порядке). Тогда

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0.$$

Замечание 5. Равенство (1) выполняется и в случае, когда точка c лежит вне сегмента $[a, b]$ (например, если c лежит правее сегмента $[a, b]$, и функция $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$).

Замечание 6. Если функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c]$ и не интегрируема на $[c, b]$, то она не интегрируема на объединении этих смежных отрезков, т.е. на $[a, b]$.

1.5. Интегралы с переменным верхним (нижним) пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$.
Функция

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b),$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом* от функции $f(x)$ на $[a, b]$. Аналогично вводится понятие интеграла с переменным нижним пределом.

При доказательстве дальнейших теорем нам понадобится следующее свойство определенного интеграла: если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$, причём $f(x) \geq g(x)$ для любой точки

$x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. Это свойство немедленно вытекает из

определения интеграла как предела интегральных сумм и теоремы о предельном переходе в неравенствах (см. параграф 2, п. 2.1, свойство 2).

Обратимся к важнейшим свойствам функции $F(x)$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Так как $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на нём. Значит, существует число $A > 0$ такое, что $|f(x)| \leq A \quad \forall x \in [a, b]$. Возьмём произвольную точку $x \in [a, b]$. Пусть Δx – действительное число, достаточно малое, чтобы удовлетворять условию

$x + \Delta x \in [a, b]$ (в случае $x = a$ нам нужно доказать только непрерывность функции $F(x)$ справа, и мы берём $\Delta x > 0$, в случае $x = b$: $\Delta x < 0$). Тогда

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \\ &\leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq \int_x^{x+\Delta x} A dt = A \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

(при этом было использовано свойство 5 п. 2.1 параграфа 2). Это означает, что $|F(x + \Delta x) - F(x)| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$, т.е. что функция $F(x)$ непрерывна в точке $x \in [a, b]$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Если $f(x)$ непрерывна в точке $\xi \in [a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

дифференцируема в точке ξ и $F'(\xi) = f(\xi)$.

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке $\xi \in [a, b]$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $f(\xi) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(\xi) + \varepsilon$ для любой точки $t \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Пусть сначала $\xi \neq b$. Выберем число Δx , $0 < \Delta x < \delta$, достаточно малое для того, чтобы сегмент $[\xi, \xi + \Delta x]$ целиком лежал внутри сегмента $[a, b]$. Тогда

$$\int_{\xi}^{\xi+\Delta x} \frac{f(\xi) - \varepsilon}{\Delta x} dt \leq \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} \frac{f(t)}{\Delta x} dt \leq \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} \frac{f(\xi) + \varepsilon}{\Delta x} dt.$$

Проинтегрируем последнее неравенство:

$$\frac{f(\xi) - \varepsilon}{\Delta x} \Delta x \leq \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} \leq \frac{f(\xi) + \varepsilon}{\Delta x} \Delta x.$$

Это означает, что при достаточно малых значениях $\Delta x > 0$ число $\frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x}$ принадлежит сегменту $[f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon]$.

Пусть теперь $\xi \neq a$, число Δx принадлежит интервалу $(-\delta, 0)$ и достаточно мало для того, чтобы сегмент $[\xi + \Delta x, \xi]$ принадлежал $[a, b]$. Тогда аналогично предыдущему случаю имеем:

$$\int_{\xi + \Delta x}^{\xi} \frac{f(\xi) - \varepsilon}{\Delta x} dt \geq \int_{\xi + \Delta x}^{\xi} \frac{f(t)}{\Delta x} dt \geq \int_{\xi + \Delta x}^{\xi} \frac{f(\xi) + \varepsilon}{\Delta x} dt.$$

Отсюда после интегрирования получаем, что

$$\frac{f(\xi) - \varepsilon}{\Delta x} (-\Delta x) \geq \frac{F(\xi) - F(\xi + \Delta x)}{\Delta x} \geq \frac{f(\xi) + \varepsilon}{\Delta x} (-\Delta x),$$

т.е. снова число $\frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x}$ лежит на $[f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon]$.

Таким образом, мы доказали, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x}$ существует и равен $f(\xi)$ (в случае $\xi = a$ доказано существование предела справа, в случае $\xi = b$ – слева). Но по определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} = F'(\xi)$.

Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ является одной из (точных) первообразных⁵ $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 3. Кусочно-непрерывная⁶ на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет (обобщенную) первообразную⁷ на этом сегменте.

⁵ Функция $F(x)$ называется *точной первообразной* по отношению к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если в любой точке этого сегмента функция $F(x)$ имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ (на концах сегмента речь идёт об односторонних производных).

⁶ Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна на этом сегменте всюду за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода $x_1, \dots, x_k$.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_k$ – точки разрыва функции и

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b.$$

Тогда функция $f(x)$ непрерывна на каждом из интервалов (x_{j-1}, x_j) , $j = 1, \dots, k+1$, следовательно, на каждом таком интервале существует точная первообразная для $f(x)$, т.е. функция $F_j(x)$ такая, что $F_j'(x) = f(x)$, $x \in (x_{j-1}, x_j)$. Положим $F_j(x_{j-1}) = F_j(x_{j-1} + 0)$, $F_j(x_j) = F_j(x_j - 0)$ и рассмотрим функцию

$$\tilde{F}_j(x) = F_j(x) + F_{j+1}(x_j) - F_j(x_j), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, k+1.$$

Тогда очевидно, что функция $F(x) = \tilde{F}_j(x)$, $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, k+1$, определена и непрерывна на всём сегменте $[a, b]$. Значит, согласно определению, эта функция является обобщенной первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 4 (формула Ньютона–Лейбница, или основная теорема интегрального исчисления). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x)$ – любая из (точных) первообразных функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по следствию из теоремы 2 получаем, что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a, b]$. Поскольку любые две первообразные одной и той же функции могут отличаться только на константу, то для произвольной первообразной $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на $[a, b]$ справедливо соотношение $F(x) = \Phi(x) + C$. Тогда имеем

⁷ Функция $F(x)$ называется *обобщенной первообразной* для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

(здесь был использован тот факт, что $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$).

Теорема доказана.

Следствие. Производная интеграла с переменным верхним (нижним) пределом находится по правилу

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad \left(\int_x^b f(t)dt \right)' = -f(x).$$

Замечание 1. Формула Ньютона–Лейбница верна и в случае, когда $\Phi(x)$ – обобщённая первообразная.

Замечание 2. В общем случае, когда необходимо продифференцировать по x интеграл вида $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t, x)dt$, в котором подынтегральная функция $f(t, x)$

и пределы интегрирования $\varphi(x), \psi(x)$ зависят от x как от параметра, используют формулу Лейбница:

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t, x)dt = f(\psi(x), x) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x), x) \cdot \varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(t, x)dt \quad (2)$$

(при этом функции $\varphi(x), \psi(x)$ должны быть дифференцируемы, а функции $f(t, x)$ и $f'_x(t, x)$ – непрерывны в соответствующих промежутках. Строгое обоснование условий применимости данной формулы изучают позже в разделе «Интегралы, зависящие от параметра»).

Пример 1. Найдите $\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx$.

Решение. Поскольку функция $F(x) = |x|$ является первообразной для подынтегральной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (в обобщённом смысле: $F(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 2]$, и её производная всюду, за исключением точки $x = 0$, где она не дифференцируема, совпадает с $f(x)$), то, применяя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = |x| \Big|_{-1}^2 = 2 - 1 = 1.$$

Пример 2. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона–Лейбница приводит к неверным результатам:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} dx; \text{ в) } \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) \right) dx.$$

Решение. а) Во-первых, подынтегральная функция $1/x$ не ограничена на промежутке интегрирования (в окрестности точки $x = 0$ нарушается необходимое условие интегрируемости), т.е. эта функция не интегрируема на данном сегменте. Кроме того, функция $\ln|x|$, являющаяся первообразной для подынтегральной функции, разрывна на сегменте $[-1, 1]$ (в точке $x = 0$). Формула Ньютона–Лейбница не применима.

б) Подынтегральная функция $\frac{1/\cos^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x}$ имеет устранимые разрывы в точках $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$, принадлежащих промежутку интегрирования. В этих точках функцию можно доопределить до непрерывной значением $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}} \frac{1/\cos^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$, поэтому функция интегрируема на $[0, 2\pi]$. Однако пер-

вообразная функция $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right)$ имеет разрывы 1-го рода в указанных точках. Поэтому формулу Ньютона–Лейбница применять нельзя.

в) Первообразная функция $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ (и подынтегральная функция тоже) имеет разрыв 1-го рода в точке $x = 0$. Формула Ньютона–Лейбница не применима. Для вычисления интеграла следует найти обобщённую первообразную для подынтегральной функции, обладающую свойством непрерывности на сегменте $[-1, 1]$.

Замечание 3. Необходимо отметить, что интегрируемость функции по Риману на некотором сегменте и существование у неё первообразной на этом сегменте, вообще говоря, не эквивалентны друг другу. Существуют функции, интегрируемые на сегменте, но не имеющие на нём первообразной, и наоборот, функции, имеющие первообразную, но не интегрируемые по Риману (см. задачу 54).

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к § 1

Вычисление определённых интегралов по определению, т.е. переходом к пределу интегральных сумм

1. Найдите интегральную сумму $\sigma(T, \xi)$ для функции $f(x) = x$ на сегменте $[1, 2]$, разбивая его на частичные сегменты точками

$$\text{а) } x_k = 1 + \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad \text{б) } x_k = 2^{\frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

и выбирая значения аргумента ξ_k в правых концах этих отрезков. Вычислите соответствующий интеграл, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$.

2. Убедившись в том, что для функции $f(x) = 1 + x$ на сегменте $[-1, 4]$ выполняется необходимое и достаточное условие интегрируемости, вычислите как предел интегральных сумм (по определению) интеграл

$$I = \int_{-1}^4 (1+x) dx.$$

3. Следующие определённые интегралы вычислите как пределы соответствующих интегральных сумм, произведя разбиение промежутка интегрирования надлежащим образом:

$$\text{а) } \int_0^1 e^x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx; \quad \text{в) } \int_{-1}^2 x^2 dx; \quad \text{г) } \int_1^3 x^3 dx; \quad \text{д) } \int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b); \quad \text{е) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Задачи на свойства интегральных сумм Римана и Дарбу. Исследование функций на интегрируемость

4. Найдите нижнюю $s(T)$ и верхнюю $S(T)$ суммы Дарбу функции $f(x)$ на соответствующих сегментах, деля последние на n равных частей, если

$$\text{а) } f(x) = x^3, \quad x \in [-2, 3]; \quad \text{б) } f(x) = 2^x, \quad x \in [0, 10].$$

5. Какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, заданная на некотором сегменте, чтобы её нижняя и верхняя суммы Дарбу на этом сегменте совпали с некоторой интегральной суммой (Римана)?

6. Приведите примеры (в частности, графические) функций, определённых на сегменте $[-1, 1]$, у которых на этом сегменте нижняя и верхняя суммы Дарбу отличны от любой интегральной суммы (Римана).

7. Пусть f – ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция. Докажите ограниченность множеств всех верхних и всех нижних сумм Дарбу этой функции на рассматриваемом сегменте.

8. а) Докажите, что от добавления новых точек разбиения сегмента на частичные сегменты нижняя сумма Дарбу рассматриваемой на этом сегменте функции f не уменьшится, а верхняя – не увеличится.

б) Докажите, что любая нижняя интегральная сумма функции f , заданной на сегменте $[a, b]$, не превосходит любую верхнюю, даже если последняя отвечает другому разбиению сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты.

9. Докажите, что если f – интегрируемая по Риману на $[a, b]$ функция, то её суммы Дарбу удовлетворяют предельному соотношению ($\Delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta_k$ – диаметр разбиения):

$$\lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} s(T).$$

10. Для функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}; \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}, \end{cases}$$

рассматриваемой на сегменте $[-1, 1]$, найдите всевозможные интегральные суммы (выбирая различным образом ξ_k), а также нижнюю и верхнюю суммы Дарбу, соответствующие разбиению сегмента на 4 равные части.

11. При каком шаге разбиения сегмента $[a, b]$ на равные частичные сегменты разность верхней и нижней сумм Дарбу функции f , монотонной на $[a, b]$, будет меньше заданного $\varepsilon > 0$?

12. Приведите примеры функций, интегрируемых на заданном множестве по Риману и принадлежащих следующим классам интегрируемых функций:

а) непрерывных на сегменте $[a, b]$;

б) ограниченных на сегменте $[a, b]$ функций, множество точек разрыва которых имеет меру нуль по Жордану;

в) монотонных на сегменте $[a, b]$;

г) удовлетворяющих условию Липшица на сегменте $[a, b]$;

д) сложных функций вида $\phi(f(x))$, где функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, а функция $\phi(y)$ определена на $[m, M]$ и удовлетворяет на нём условию Липшица.

13. Приведите (графически) пример функции, неинтегрируемой по Риману на сегменте $[-1, 2]$.

14. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x)), & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

15. Докажите, что $\int_0^1 f(x) dx = 0$, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]; \\ 1, & x = 1/2. \end{cases}$$

16. Пусть функция f обращается в нуль всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она определена. Докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

17. Докажите, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x - \text{рационально} (x = m/n; m \neq 0); \\ 1, & \text{если } x = 0; \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально} \end{cases}$$

(здесь $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, m, n – взаимно простые числа) интегрируема на любом сегменте $[a, b]$ числовой прямой.

18. Докажите, что функция $f(x) = \ln(2 + \operatorname{sgn} x)$ интегрируема на сегменте $[-1, 1]$.

19. Докажите, что функция Дирихле не интегрируема ни на каком сегменте $[a, b]$ числовой прямой.

20. Докажите, что для всякого числа λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, существует последовательность интегральных сумм функции Дирихле, рассматриваемой на сегменте $[0, 1]$, такая, что её предел равен λ .

21. При каком $\delta(\varepsilon) > 0$ из неравенства $\Delta_T < \delta$ (Δ_T – диаметр разбиения) вытекает соотношение

$$\left| \int_0^3 \sin(50x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \sin(50\xi_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = 3$, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ – произвольная точка?

22. Функция f дифференцируема на сегменте $[a, b]$, причём $|f'(x)| \leq M$ всюду на этом сегменте. Докажите, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ такого, что диаметр разбиения $\Delta_T < \varepsilon/(M(b-a))$, соответствующие ему интегральные суммы $\sigma(T, \xi)$ удовлетворяют условию

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sigma(T, \xi) \right| < \varepsilon.$$

23. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте.

24. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$, причём для любого положительного ε существует конечная система интервалов, покрывающих все точки разрыва функции на этом сегменте, сумма длин которых меньше ε . Докажите, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

25. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и монотонна на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте.

26. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Пусть функция $\varphi(t)$ определена на сегменте $[m, M]$ и удовлетворяет на нём условию Липшица. Докажите, что тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

Задачи на свойства интегрируемых функций и интегралов, выражаемые равенствами

27. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте (необходимое условие интегрируемости).

28. Верно ли, что если функция ограничена на сегменте, то она и интегрируема на этом сегменте?

29. Можно ли утверждать, что если функция не ограничена на заданном сегменте, то она неинтегрируема по Риману на нём?

30. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема и на всяком сегменте $[c, d]$ таком, что $[c, d] \subseteq [a, b]$.

31. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем по длине из сегментов с концами в точках a, b, c , где a, b, c – различны, то справедливо свойство аддитивности интеграла Римана:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

32. Докажите, что из интегрируемости функций f и g на сегменте $[a, b]$ следует и интегрируемость их суммы (разности) $f \pm g$, при этом

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

33. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и c – произвольная константа, то функция $cf(x)$ также интегрируема на этом сегменте, причём

$$\int_a^b cf(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

34. Докажите, что если функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, а функция g таким свойством не обладает, то сумма $f + g$ этих функций не может быть интегрируемой на $[a, b]$.

35. Докажите, что неинтегрируемость функций f и g на сегменте $[a, b]$ не влечёт, вообще говоря, неинтегрируемость суммы $f + g$ этих функций на данном сегменте.

36. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируемо на $[a, b]$.

37. а) Докажите, что неинтегрируемость функций f и g на сегменте $[a, b]$ не влечёт, вообще говоря, неинтегрируемость произведения $f \cdot g$ этих функций на данном сегменте.

б) Приведите пример неинтегрируемой на сегменте $[a, b]$ функции, квадрат которой интегрируем.

38. Докажите, что из интегрируемости произведения двух функций, вообще говоря, не следует интегрируемость каждой из них в отдельности.

39. Докажите, что если одна из функций интегрируема на некотором сегменте, а другая – нет, то их произведение может быть как интегрируемым, так и неинтегрируемым на этом сегменте.

40. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Пусть функция $\varphi(t)$ определена на сегменте $[m, M]$ и непрерывна на нём. Докажите, что сложная функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

41. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Пусть функция $\varphi(t)$ определена на сегменте $[m, M]$ и интегрируема на нём. Верно ли, что композиция функций f и φ (т.е. сложная функция $\varphi(f(x))$) интегрируема на $[a, b]$?

42. Докажите, что если две ограниченные на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на нём всюду, за исключением множества точек жордановой меры нуль, то либо обе эти функции интегрируемы на $[a, b]$, и их интегралы равны

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx,$$

либо обе они неинтегрируемы на этом сегменте. Следует ли отсюда, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то, не изменяя свойства интегрируемости и самого значения интеграла функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, её значения на множестве жордановой меры нуль можно заменить произвольными конечными значениями?

43. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то равенство

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

44. Докажите, что если функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и её абсолютная величина $|f|$ интегрируема на этом сегменте.

45. Докажите, что из интегрируемости функции $|f|$ на сегменте $[a, b]$, вообще говоря, не следует интегрируемость самой функции f на этом сегменте.

46. Пусть функция f интегрируема на сегменте $[A, B]$. Докажите, что f обладает свойством *интегральной непрерывности*: для любого сегмента $[a, b] \subset (A, B)$ справедливо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

47. Пусть функция f ограничена и монотонна на сегменте $[0, 1]$. Докажите, что

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

48. Пусть f – дифференцируемая на сегменте $[a, b]$ функция, причём $|f'(x)| \leq 1$ для любого $x \in [a, b]$. Докажите, что если $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ – такое разбиение, что его диаметр $\Delta_T \leq \frac{1}{b-a}$, то $\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \frac{1}{2}$ при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Покажите, что приведённая оценка не улучшаема.

Задачи с последовательностями

49. Вычислите пределы числовых последовательностей, интерпретируя суммы под знаками пределов как интегральные суммы для некоторых функций на соответствующих сегментах:

- а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$; б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$;
 в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$; г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n}$;
 д) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$; е) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \right) (p > 0)$;
 ж) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), f(x) \in R[a, b]$; з) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)}$;

$$\text{и) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} (x > 0); \text{к) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+1/2} + \dots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+1/n}$$

50. Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ монотонна и ограничена.

51. Дана последовательность интегралов $U_n = \int_0^1 x^n (e^{-x} + 1) dx$. Докажите, что она монотонна и ограничена, и найдите её предел.

Задачи на свойства интегралов с переменным верхним (нижним) пределом

52. Докажите, что если f – интегрируемая на сегменте $[a, b]$ функция, то функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ – непрерывна на $[a, b]$.

53. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Докажите, что тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая из первообразных функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ (*основная теорема интегрального исчисления*).

54. Эквивалентны ли понятия интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и существования у этой функции первообразной на указанном сегменте? Существуют ли функции, интегрируемые на некотором сегменте, но не имеющие на нём первообразной? Существуют ли функции, имеющие на некотором сегменте первообразную, но при этом не интегрируемые на нём по Риману?

55. Пусть f – интегрируемая на сегменте $[a, b]$ функция. Выразите значение интеграла $\int_c^d f(t) dt$, где $[c, d] \subseteq [a, b]$, через значения функции

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

56. Докажите, что если интегрируемая на сегменте $[a, b]$ функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, где $x \in [a, b]$, дифференцируема в точке x_0 , причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

57. Докажите, что если f – непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$: а) не может иметь бесконечной производной ни в одной точке сегмента $[a, b]$;

б) отношение $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ в каждой точке сегмента $[a, b]$ ограничено.

58. Пусть f – непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция. Докажите, что функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является её первообразной на этом сегменте.

59. Докажите, что если f – интегрируемая на сегменте $[a, b]$ функция, удовлетворяющая условию $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in [a, b]$, то

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|,$$

где x_1, x_2 – произвольные точки $[a, b]$.

60. Найдите производные следующих функций ($x > 0$):

а) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt$; б) $F(x) = \int_1^{x^5} \ln t dt$; в) $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{2 \sin t}{t} dt$;

г) $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$.

61. Найдите производные следующих функций:

а) $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin(x^2) dx$; б) $\frac{d}{db} \int_a^b \sin(x^2) dx$; в) $\frac{d}{da} \int_a^{x^2} \sin(x^2) dx$;

г) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$; д) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+x^2} dx$; е) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

ж) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; з) $\frac{d}{dx} \int_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$; и) $\frac{d}{dt} \int_{x^2}^{t^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; к) $\frac{d}{dt} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

л) $\frac{d}{dx} \int_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^4}}$; м) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi^2) dt$.

62. Найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$.

63. Найдите пределы: а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt$, где

$\alpha > 0$, $f(t) \in C[0,1]$, $f(0) \neq 0$; в) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tgt} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt}$.

64. Докажите, что если функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, и в точке $x_0 \in [a, b]$ имеет устранимый разрыв, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

имеет в этой точке производную. Чему она равна?

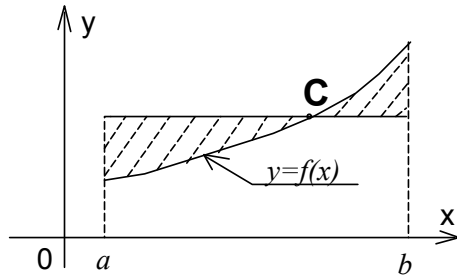
65. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Докажите, что в точке $x = 0$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ имеет правую и левую производные, которые не равны между собой.

66. Пусть функция f определена на сегменте $[a, b]$ и непрерывна на всём этом сегменте, за исключением точки x_0 , в которой она имеет разрыв

первого рода. Докажите, что функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ имеет в точке x_0 односторонние производные, которые не равны.



67. Как надо выбрать точку C на графике возрастающей дифференцируемой функции $f(x)$ (см. рис.), чтобы сумма площадей заштрихованных фигур была наименьшей?

68. Докажите соотношение эквивалентности:

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

69. Пусть $f(x)$ — непрерывная положительная функция на $[0, +\infty)$. Докажите, что функция

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

возрастает на этом промежутке.

70. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2} dt$$

на сегменте $[-1, 1]$.

71. Исследуйте на экстремум и найдите точки перегиба графика функции

$$y = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt.$$

72. Докажите тождество $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \quad (x \in R).$

Разные задачи

73. Вычислите предел

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ где } f(x) \in C[0, 1].$$

74. Существует ли функция $f(x)$, определённая на сегменте $[0, 2]$ и удовлетворяющая на нём условиям: 1) $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, 2]$; 2) $f(0) = f(2) = 1$; 3) $|f'(x)| \leq 1$; 4) $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1$?

75. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна и $f(x) = \int_0^x f(t) dt$, то $f(x)$ тождественно равна нулю.

ОЦЕНКИ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ: ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В некоторых задачах требуется, не вычисляя интеграла аналитически (это может оказаться затруднительно или даже невозможно), оценить его примерное значение. В данном параграфе рассматриваются различные интегральные неравенства и оценки, которые можно использовать в этой ситуации.

2.1. Свойства определённого интеграла, связанные с неравенствами⁸

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. Пусть $V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ – произвольное размеченное разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда $\sigma(V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0$, следовательно, $I = \lim_{\Delta_v \rightarrow 0} \sigma(V) \geq 0$.

Замечание 1. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. То есть из того, что для некоторой интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет место

неравенство $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, не следует, вообще говоря, что $f(x) \geq 0$

$\forall x \in [a, b]$. Например, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 1 > 0$, но при этом, очевидно, неравен-

ство $\cos x \geq 0$ не выполняется при $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$.

⁸ Свойства определённого интеграла, выражаемые *равенствами*, были рассмотрены выше в §1.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$, причём $f(x) \geq g(x)$ для любой точки $x \in [a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(почленное интегрирование неравенств).

Доказательство. Так как функция $f(x) - g(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и $(f(x) - g(x)) \in R[a, b]$ (как разность двух интегрируемых функций), то из предыдущего пункта следует, что

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0.$$

Замечание 2. Обратное утверждение о том, что если для некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых на сегменте $[a, b]$, выполняется неравен-

ство $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, то отсюда следует, что $\forall x \in [a, b]$

$f(x) \geq g(x)$, вообще говоря, неверно (см. пример из замечания 1).

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a, b]$. Пусть, кроме того, существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая,

что $f(x_0) > 0$. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказательство. Пусть $f(x_0) = \alpha > 0$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) \geq \alpha/2$ для любой точки $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (свойство локального сохранения знака функцией, непрерывной в точке). Введём вспомогательную функцию

$$g(x) = \begin{cases} \alpha/2, & x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0, & x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{cases}.$$

Очевидно, что $f(x) \geq g(x)$ для любой точки $x \in [a, b]$. Значит, по свойству 2,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = 2\delta \cdot \frac{\alpha}{2} > 0.$$

4. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ для любой точки $x \in [a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Доказательство (от противного). Пусть функция $f(x)$ не равна тождественно нулю на отрезке $[a, b]$. Тогда существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) > 0$. Значит, $\int_a^b f(x)dx > 0$ (свойство 3). Полученное противоречие доказывает утверждение.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, то и её модуль является интегрируемой функцией на этом отрезке, причём

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Так как для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство $||x| - |y|| \leq |x - y|$, то функция $\varphi(x) = |x|$ удовлетворяет условию Липшица с константой, равной 1, на любом конечном сегменте. Это означает, что сложная функция $\varphi(f(x)) = |f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Другое доказательство приведено в задаче 44 параграфа 1.

Далее, так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ для любого $x \in [a, b]$, то по свойству 2 имеем: $\int_a^b (-|f(x)|)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, т.е.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. В общем случае для интегрируемых на $[a, b]$ функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, верно неравенство

$$\left| \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_a^b f_k(x) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_a^b |f_k(x)| dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right) dx.$$

6. Если функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, то

для любого сегмента $[c, d] \subseteq [a, b]$ имеем: $\int_c^d f(x)dx = 0$.

Доказательство. В самом деле, требуемое соотношение следует из цепочки неравенств

$$0 \leq \left| \int_c^d f(x)dx \right| \leq \int_c^d |f(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx = 0.$$

7. Если функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $\int_c^d f(x)dx = 0$ для всякого сегмента $[c, d] \subseteq [a, b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Доказательство (от противного). Предположим, что существует такое $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) \neq 0$. Ради определённости будем считать $f(x_0) > 0$. Тогда из непрерывности f следует, что найдётся такой сегмент

$[c, d]$ ($x_0 \in [c, d] \subseteq [a, b]$), на котором $f(x) > 0$. Отсюда $\int_c^d f(x)dx > 0$,

что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и утверждение доказано.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причём $I = \int_a^b f(x)dx > 0$, то существует сегмент $[c, d] \subseteq [a, b]$, на котором $f(x) > 0$.

Доказательство (от противного). Предположим, что на любом сегменте $[c, d] \subseteq [a, b]$ существует точка, в которой $f(x) \leq 0$. Выполним произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты. На каждом из них выберем точку ξ_k так, чтобы $f(\xi_k) \leq 0$. Но тогда интегральные суммы

$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ будут неположительны и, следовательно, их предел при $\Delta_T \rightarrow 0$, равный интегралу I , не может быть положительной величиной.

Полученное противоречие с условием $I > 0$ доказывает утверждение.

9. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на сегменте $[a, b]$ и интегрируема на нём. Тогда для выполнения условия $\int_a^b f(x)dx > 0$ ($a < b$) необходимо и достаточно, чтобы множество нулей функции $f(x)$ не было всюду плотным⁹ на $[a, b]$.

Доказательство. 1) *Достаточность.* Если множество нулей функции $f(x)$ не плотно на сегменте $[a, b]$, то существует такой сегмент $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$, на котором $f(x) > 0$. Но тогда $\int_c^d f(x)dx > 0$ и, следовательно, $\int_a^b f(x)dx > 0$.

2) *Необходимость* (от противного). Пусть $\int_a^b f(x)dx > 0$, и множество нулей функции $f(x)$ всюду плотно на сегменте $[a, b]$. Тогда все нижние суммы Дарбу функции f на этом сегменте равны нулю и, значит, $\int_a^b f(x)dx = 0$. Получили противоречие, что доказывает утверждение.

2.2. Интегральные теоремы о среднем

При построении оценок значений определённых интегралов часто оказываются полезными следующие теоремы.

2.2.1. Первая теорема о среднем. Среднее значение функции

Теорема 1 (первая теорема о среднем значении). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, и пусть функция $g(x) \geq 0$ (≤ 0) для любого $x \in [a, b]$. Тогда, если $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, то существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что

⁹ Множество называется *всюду плотным*, если в любой сколь угодно малой окрестности каждого его элемента содержится по крайней мере ещё один элемент этого множества.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Так как $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a, b]$, то, умножив последнее неравенство на $g(x)$, получим $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Поскольку произведение двух интегрируемых функций – интегрируемая функция, и знак неравенства сохраняется при взятии интеграла (см. свойство 2 п. 2.1), то

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx.$$

Заметим, что в крайней левой и в крайней правой частях неравенства константу можно вынести за знак интеграла:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx. \quad (3)$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то из последнего неравенства вытекает, что

$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, и соотношение справедливо для любого действительного числа μ . В противном случае $\int_a^b g(x)dx > 0$ (функция $g(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$, значит, и интеграл от неё неотрицателен). Тогда

можем поделить неравенство (3) на $\int_a^b g(x)dx$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \text{ Обозначим } \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Равенство (1) (в случае неотрицательной функции $g(x)$) доказано.

Если $g(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то положим $g_1(x) = -g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Тогда $g_1(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и, по уже доказанному, существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g_1(x)dx = \mu \int_a^b g_1(x)dx.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g_1(x)dx &= \int_a^b f(x)(-g(x))dx = -\int_a^b f(x)g(x)dx, \\ \int_a^b g_1(x)dx &= \int_a^b (-g(x))dx = -\int_a^b g(x)dx, \end{aligned}$$

значит, формула (1) справедлива и в этом случае.

Соотношение (2) сразу следует из (1) и из теоремы о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение. Теорема полностью доказана.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Тогда существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \quad (1')$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует точка ξ из отрезка $[a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (2')$$

Доказательство. Достаточно положить в формулах (1) и (2) $g(x) \equiv 1$.

Число $M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением* (интегрируемой) функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Рассмотрим некоторые *свойства* среднего значения функции.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдётся такая точка $\xi \in (a, b)$, что $M[f] = f(\xi)$.

2. Среднее значение функции удовлетворяет условию

$$m(b-a) \leq M[f] \leq M(b-a),$$

где $m = \inf_{a < x < b} f(x)$, $M = \sup_{a < x < b} f(x)$.

3. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и существует конечный предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x)dx$ и он равен A .

Доказательство. 1) Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$. Для определённости бу-

дем считать, что $A > 0$. Покажем, что $\int_0^x f(t)dt \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. В

самом деле, поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, то по определению предела функции это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Тогда при достаточно больших x имеем:

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^\delta f(x)dx + \int_\delta^x f(x)dx.$$

Первый из интегралов есть некоторое число, а для второго имеем оценку:

$$\int_\delta^x f(x)dx > \int_\delta^x (A - \varepsilon)dx = (A - \varepsilon)x \Big|_\delta^x \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, $\int_0^x f(x)dx$ – бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой воспользуемся правилом Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x f(t)dt \right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1} = A.$$

2) Пусть теперь $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 0$. Рассмотрим функцию $g(x) \equiv f(x) + 1$. Так как, по условию, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Значит, по доказанному имеем: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt = 1$. Но тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (g(t) - 1)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t)dt - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x 1dt =$$

$= 1 - 1 = 0$, что и требовалось доказать.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\frac{1}{d-c} \int_c^d f(x)dx = \lambda$ для всякого сегмента $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$, то $f(x) \equiv \lambda$ на $[a, b]$.

Доказательство (от противного). Предположим, что существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) \neq \lambda$. Пусть, для определённости, $f(x_0) > \lambda$. Тогда, в силу непрерывности f , найдётся сегмент $[c, d]$ ($x_0 \in [c, d] \subseteq [a, b]$), на котором $f(x) > \lambda$. Отсюда

$$\frac{1}{d-c} \cdot \int_c^d f(x)dx > \lambda, \text{ что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и утверждение доказано.}$$

5. Непрерывная функция $f(x)$ положительна на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует такое число $\lambda > 0$, что для всякого сегмента $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$, выполняется неравенство

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(x)dx \geq \lambda.$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $f(x) > 0$, $x \in [a, b]$. Тогда, в силу непрерывности f на любом сегменте $[c, d]$, $m = \inf_{c \leq x \leq d} f(x) > 0$ и

$$\int_c^d f(x)dx \geq m(d-c).$$

Остаётся положить $\lambda = m$.

2) *Достаточность* (от противного). Пусть существует $\lambda > 0$ такое, что для всякого сегмента $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$, выполняется неравенство

$$\int_c^d f(x)dx \geq \lambda(d-c).$$

Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ $f(x_0) < 0$. Тогда, в силу непрерывности $f(x)$, найдётся сегмент $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$, на котором $f(x) < 0$ и, следовательно, $M = \sup_{c \leq x \leq d} f(x) < 0$. Тогда

$$\int_c^d f(x)dx \leq M(d-c) < 0,$$

что противоречит условию

$$\int_c^d f(x)dx \geq \lambda(d-c) > 0.$$

2.2.2. Вторая теорема о среднем

Теорема 2 (вторая теорема о среднем значении). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$.

1) Если $g(x) \geq 0$ и не возрастает на $[a, b]$, то найдётся такая

$$\text{точка } \xi \in [a, b], \text{ что } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx.$$

2) Если $g(x) \geq 0$ и не убывает на $[a, b]$, то найдётся такая точка

$$\xi' \in [a, b], \text{ что } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_{\xi'}^b f(x)dx.$$

3) Если $g(x)$ монотонна на $[a, b]$, то найдётся такая точка $\xi'' \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi''} f(x)dx + g(b) \int_{\xi''}^b f(x)dx.$$

Первые две формулы обычно называют *формулами Бонне* (*O.Bonnet*).

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Заметим, что если $g(a) = 0$, то $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ и данное утверждение очевидно. Пусть $g(a) > 0$. Рассмотрим разбиение $T_n = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[a, b]$ на n равных частей.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } M &= \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx. \text{ Тогда} \\ \left| \sigma_n - \int_a^b f(x)g(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x) dx \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_{k-1}) - g(x)) f(x) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x_{k-1}) - g(x)| \cdot |f(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n M \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |g(x_{k-1}) - g(x)| \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx = M \sum_{k=1}^n (g(x_{k-1}) - g(x_k)) \frac{b-a}{n} = \\ &= \frac{M(b-a)}{n} (g(a) - g(b)). \end{aligned}$$

Поскольку последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то

$$\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Пусть теперь $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ – интеграл с переменным верхним пределом.

Так как функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (см. теорему 1 п. 1.5), то она ограничена на этом сегменте и достигает на нём своих точной верхней и нижней граней. Пусть точная нижняя грань достигается в точке α , верхняя – в точке β . Преобразуем выражение для σ_n , используя функцию $F(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \left(\int_a^{x_k} f(x) dx - \int_a^{x_{k-1}} f(x) dx \right) = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) F(x_k) + g(x_{n-1}) F(b) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) F(\beta) + g(x_{n-1}) F(\beta) = g(a) F(\beta)$$

(при выводе последнего неравенства мы учли, что $g(x_{k-1}) - g(x_k) \geq 0$, т.к. функция $g(x)$ является невозрастающей, а также то, что $F(x) \leq F(\beta)$ для любого $x \in [a, b]$).

Аналогично доказывается, что $\sigma_n \geq g(a) F(\alpha)$. Поскольку $g(a) > 0$, то мы можем разделить на это число все части неравенства и получить, что

$$F(\alpha) \leq \frac{\sigma_n}{g(a)} \leq F(\beta).$$

Перейдём к пределу при $n \rightarrow \infty$ в полученном двойном неравенстве:

$$F(\alpha) \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq F(\beta). \quad (4)$$

Поскольку функция $F(x)$ непрерывна, то она принимает все промежуточные значения между $F(\alpha)$ и $F(\beta)$, т.е. существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$F(\xi) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx. \quad (5)$$

Утверждение пункта 1 полностью доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно в (5) сделать замену $f_1(x) = f(-x)$, $g_1(x) = g(-x)$.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы, положим в соотношении (5)

$$g_1(x) = g(x) - g(b)$$

в случае, когда $g(x)$ не возрастает, и $g_1(x) = g(x) - g(a)$, если $g(x)$ не убывает. Теорема полностью доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 видно, что в каждой из формул можно взять вместо значений функции $g(x)$ на концах сегмента (если они не определены) соответствующие пределы $g(a+0)$ и $g(b-0)$:

- 1) $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^{\xi} f(x)dx$, если $g(x) \geq 0$ и не возрастает на $[a, b]$;
- 2) $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-0)\int_{\xi'}^b f(x)dx$, если $g(x) \geq 0$ и не убывает на $[a, b]$;
- 3) $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^{\xi''} f(x)dx + g(b-0)\int_{\xi''}^b f(x)dx$, если $g(x)$ монотонна на $[a, b]$.

2.3. Некоторые известные интегральные неравенства

2.3.1. Неравенство Коши–Буняковского

Рассмотрим неравенство Коши–Буняковского¹⁰ в интегральной форме (1859), являющееся аналогом известного числового неравенства Коши–Буняковского.

Теорема 1 (неравенство Коши–Буняковского в интегральной форме). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx. \quad (1)$$

Доказательство. Из неравенства $(f(x) - t \cdot g(x))^2 \geq 0$

($x \in [a, b], t \in R$) следует, что $\int_a^b (f(x) - t \cdot g(x))^2 dx \geq 0$, или

$$t^2 \int_a^b g^2(x)dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0.$$

Левая часть последнего неравенства – квадратный трёхчлен относительно t . Данное неравенство выполняется при всех t тогда и только тогда, когда дискриминант этого квадратного трёхчлена неположителен, т.е.

$$\left(2 \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0,$$

откуда вытекает требуемое неравенство. Теорема доказана.

¹⁰ Буняковский Виктор Яковлевич – русский математик (1804–1889).

Замечание. Интегральное неравенство Коши–Буняковского можно было доказать иначе, а именно, как следствие соответствующего числового аналога. Рассмотрим и это доказательство.

Лемма 1 (неравенство Коши–Буняковского в числовой форме). Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ – произвольные неотрицательные числа. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Доказательство. Очевидно, что $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ для любых неотрицательных чисел a и b . Положим в этом неравенстве $a = \frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, $b = \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

и просуммируем по i от 1 до n . Получим

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}} \leq 1,$$

откуда немедленно следует неравенство (2). Лемма 1 доказана.

Отметим, что в силу очевидного неравенства $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i|$, утверждение леммы справедливо для произвольных (не обязательно неотрицательных) чисел $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[a, b]$ на n равных частей. Тогда неравенство (1) получается предельным переходом в неравенстве

$$\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i) \frac{b-a}{n} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i) \frac{b-a}{n} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i) \frac{b-a}{n} \right)$$

или эквивалентном неравенстве

$$\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i) \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i) \right),$$

которое представляет собой неравенство Коши–Буняковского в числовой форме.

2.3.2. Неравенство Коши¹¹

Лемма 2 (неравенство Коши в числовой форме). Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ – произвольные неотрицательные числа. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Доказательство. Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского для чисел, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i) + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i) \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right) \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует неравенство (3). Лемма 2 доказана.

Теорема 2 (неравенство Коши в интегральной форме). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Доказательство. Так же, как в теореме 1 данного пункта, разобьём отрезок $[a, b]$ на n равных частей. Тогда достаточно доказать неравенство для соответствующих интегральных сумм:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) + g(x_i))^2 \frac{b-a}{n} \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i) \frac{b-a}{n} \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i) \frac{b-a}{n} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

или эквивалентное неравенство

¹¹ Огюстен Луи Коши – французский математик (1789–1857).

$$\left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) + g(x_i))^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i) \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i) \right)^{1/2}.$$

Так как $\left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) + g(x_i))^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n (|f(x_i)| + |g(x_i)|)^2 \right)^{1/2}$, то требуемое утверждение немедленно вытекает из результатов леммы 2. Теорема 2 доказана.

Замечание. Если определить для функции $f(x)$, интегрируемой на сегменте $[a, b]$, понятие нормы: $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$, то интегральное неравенство Коши есть аналог известного в алгебре неравенства для модулей: $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

2.3.3. Неравенство Гёльдера¹²

Теорема 3 (неравенство Гёльдера в интегральной форме). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две произвольные интегрируемые по Риману на сегменте $[a, b]$ функции, p и q – два действительных числа, больших 1, таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Доказательство теоремы можно найти, например, в [1] (стр. 239) или [9] (стр. 367).

Замечание. В случае $p = q = 2$ из неравенства Гёльдера получаем неравенство Коши–Буняковского.

2.3.4. Неравенство Минковского¹³

Неравенство Минковского было установлено Г. Минковским (1896) и является обобщением неравенства треугольника для нормированных векторных пространств.

¹² Людвиг Отто Гёльдер – немецкий математик (1859–1937).

¹³ Герман Минковский – немецкий математик и физик (1864–1909).

Теорема 4 (неравенство Минковского в интегральной форме). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две неотрицательные и интегрируемые на сегменте $[a, b]$ функции, $p \geq 1$ – любое действительное число. Тогда справедливо неравенство

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство Минковского является следствием неравенства Гёльдера, его доказательство можно найти, например, в книгах [1;9].

Замечание 1. Для произвольных (не обязательно неотрицательных) интегрируемых на $[a, b]$ функций неравенство Минковского имеет вид

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

Замечание 2. В случае $p = 2$ из неравенства Минковского получаем неравенство Коши.

Замечание 3. В случае $p = n = 1$ из неравенства Минковского (для сумм)

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{1/p}$$

получаем известное неравенство для модулей (неравенство треугольника):

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Замечание 4. По индукции можно доказать и более общее неравенство для функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, неотрицательных и интегрируемых на сегменте $[a, b]$:

$$\left(\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В заключение рассмотрим ещё одно интегральное неравенство, доказательство которого можно найти в [1] (стр. 240).

Пусть функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, интегрируемы на сегменте $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)^2} \leq \int_a^b \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n f_k^2(x)} dx.$$

2.3.5. Неравенства для выпуклых функций

Теорема 5. Если функция $f(x)$ непрерывна и выпукла вверх (в нестрогом смысле слова) на сегменте $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b - a). \quad (1)$$

Если же функция $f(x)$ непрерывна и выпукла вниз на сегменте $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a). \quad (2)$$

Доказательство. Докажем неравенство (2) (неравенство (1) доказывается аналогично).

1) Вначале докажем правое неравенство. По условию, функция $f(x)$ непрерывна и выпукла вниз на $[a, b]$, откуда следует, что для произвольной точки $x \in [a, b]$

$$f(x) \leq \frac{f(a)(b-x) + f(b)(x-a)}{b-a}.$$

Действительно, это вытекает из справедливости неравенства Йенсена: для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ и любых неотрицательных чисел λ_1, λ_2 таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Положив $\lambda_1 = \frac{b-x}{b-a}$, $\lambda_2 = \frac{x-a}{b-a}$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, получим неравенство (3).

Геометрический смысл этого неравенства: ордината точки, лежащей на графике и имеющей абсциссу x , не больше ординаты точки с той же абсциссой, но лежащей на хорде, стягивающей точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. Отсюда, интегрируя по сегменту $[a, b]$, получаем доказанным правое неравенство в (2):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\leq \frac{f(a)}{b-a} \int_a^b (b-x)dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx = \\ &= \frac{f(a)}{b-a} \left(bx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b + \frac{f(b)}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) \Big|_a^b = \frac{f(a)+f(b)}{2} (b-a). \end{aligned}$$

2) Для доказательства левого неравенства (2) сделаем замену $x = (a+b)/2 + t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt = \\ &= \int_{-(b-a)/2}^0 f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt + \int_0^{(b-a)/2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt. \end{aligned}$$

Положив в первом из интегралов $z = -t$ и используя затем неравенство Йенсена, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{(b-a)/2} f\left(\frac{a+b}{2} - z\right)dz + \int_0^{(b-a)/2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)dt &= \\ = \int_0^{(b-a)/2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \right)dt &\geq \\ \geq \int_0^{(b-a)/2} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \end{aligned}$$

Неравенство доказано.

Замечание. Доказать левую часть неравенства (2) можно было иначе.

Сделав замену $x = (a+b)/2 + t$, докажем неравенство

$$\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(f\left(t + \frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) dt \geq 0.$$

Если перенести начало координат в точку $\frac{a+b}{2}$, то получим, что нам надо

исследовать знак интеграла $\int_{-A}^A g(t)dt$, причём про функцию $g(t)$ известно,

что она выпукла вниз на сегменте $[-A, A]$ и, кроме того, $g(0) = 0$. По оп-

ределению выпуклости, если некоторая функция выпукла вниз на сегменте, то её график на этом отрезке лежит не ниже касательной, проведённой к графику функции в любой точке сегмента. Проведём касательную в точке с абсциссой $t = 0$. Очевидно, что интеграл от неё по симметричному отрезку ра-

вен нулю. Значит, $\int_{-A}^A g(t)dt \geq 0$, т.е.

$$\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(f\left(t + \frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) dt \geq 0,$$

что равносильно левой части неравенства (2).

В [17] (с.153) приводится интегральное неравенство Йенсена в общем виде. Пусть функция $q(x)$ задана на сегменте $[a, b]$ и принимает значения из некоторого промежутка X , на котором определена и выпукла вниз функция $f(x)$. Пусть также на $[a, b]$ задана положительная функция $p(x)$. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)q(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leq \frac{\int_a^b p(x)f(q(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

Это неравенство является интегральным аналогом числового неравенства Йенсена (в общем виде)

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

где функция $f(x)$ предполагается выпуклой вниз на некотором промежутке $[a, b]$, которому принадлежат точки x_i ; p_i – положительные числа (весовые коэффициенты).

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к §2

Задачи на среднее значение интегрируемой функции

1. Найдите среднее значение функции на заданном сегменте:

а) $f(x) = \cos x$ на $[0, \frac{3\pi}{2}]$; б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-1, 2]$; в) $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$;

г) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ на $[0, 2\pi]$; д) $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ на $[0, 2]$.

2. При каком a среднее значение функции $f(x) = \ln x$ на сегменте $[1, a]$ равно средней скорости изменения функции на этом сегменте?

3. Найдите среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна V_0 .

4. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Найдите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx$.

Рассмотрите пример $f(x) = \arctg x$.

5. Докажите, что если функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$ и

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(x) dx = \lambda$$

для всякого сегмента $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$, то $f(x) \equiv \lambda$ на $[a, b]$.

6. Докажите, что непрерывная функция f положительна на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует такое число $\lambda > 0$, что для всякого сегмента $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$, выполняется неравенство

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(x) dx \geq \lambda.$$

Задачи на свойства интегралов, связанные с неравенствами

7. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ ($a < b$) и принимает на этом сегменте неотрицательные значения, то справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Верно ли, что если функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$ и строго положительна на нём, то $\int_a^b f(x) dx > 0$?

8. Верно ли, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то из неравенства $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ следует, что $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ (утверждение, обратное к сформулированному в задаче 7)?

9. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, причём $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x)$ ($f(x) > g(x)$), то интегралы от этих функций связаны между собой неравенством аналогичного знака:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad \left(\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx \right).$$

10. Верно ли, что если для некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$, то отсюда следует, что $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ (утверждение, обратное сформулированному в предыдущей задаче)?

11. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a, b]$, и существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) > 0$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

12. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $\int_c^d f(x) dx = 0$ для всякого сегмента $[c, d] \subseteq [a, b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

13. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и для всякого сегмента $[c, d]$ такого, что $a \leq c < d \leq b$, выполняется

$$\int_c^d f(x) dx \geq 0, \text{ то при } x \in [a, b] \text{ функция } f(x) \geq 0.$$

14. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ для любой точки $x \in [a, b]$ и $\int_a^b f(x) dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

15. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то справедливо неравенство $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

16. Докажите, что для интегрируемых на $[a, b]$ функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, верно неравенство

$$\left| \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_a^b f_k(x) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_a^b |f_k(x)| dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right) dx.$$

17. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b |f(x)| dx = 0$. Докажите, что $\int_c^d f(x) dx = 0$ для любого сегмента $[c, d] \subseteq [a, b]$.

18. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причём $\int_a^b f(x) dx > 0$, то существует сегмент $[c, d] \subseteq [a, b]$, на котором $f(x) > 0$.

19. Пусть функция f неотрицательна на сегменте $[a, b]$ и интегрируема на нём. Докажите, что для выполнения условия $\int_a^b f(x) dx > 0$ ($a < b$) необходимо и достаточно, чтобы множество нулей функции f не было всюду плотным на $[a, b]$ (множество назовём *всюду плотным*, если в любой сколь угодно малой окрестности каждого его элемента содержится по крайней мере ещё один элемент этого множества).

20. Докажите, что $\frac{b-a}{b} < \int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{a}$, где $0 < a < b$.

21. Используя результат предыдущей задачи, докажите неравенство Коши

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

где a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – положительные числа.

Задачи на оценки значений и сравнение определённых интегралов

22. Положительны или отрицательны следующие определённые интегралы:

$$\text{а) } \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx; \quad \text{в) } \int_0^{2\pi} x \sin x dx;$$

$$\text{г) } \int_{-2}^2 x^3 2^x dx; \quad \text{д) } \int_0^{-\pi} e^{-x} \cos x dx?$$

23. Не используя теорем о среднем, докажите неравенства:

$$\text{а) } \frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{N};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}, \text{ где } k \in \mathbb{N};$$

$$\text{в) } \frac{\pi}{128} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \frac{\pi}{4}; \quad \text{г) } 2 < \int_1^2 2^{x^2} dx < 16;$$

$$\text{д) } \frac{e-1}{3} < \int_1^e \frac{dx}{\ln x + 2} < \frac{e-1}{2}; \quad \text{е) } -\frac{1}{5} < \int_2^3 \frac{dx}{1+x-2x^2} < -\frac{1}{14};$$

$$\text{ж) } e^{-\frac{1}{e}} \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1, \text{ полагая, что } x^x \text{ при } x=0 \text{ равно } 1;$$

$$\text{з) } \frac{1}{5} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{25-x+x^2}} < \frac{2}{3\sqrt{11}}; \quad \text{и) } \frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

24. Докажите неравенство: $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \leq \ln \frac{1}{\cos x}$, $x \in [0, \pi/2)$.

25. Докажите неравенства:

$$\text{а) } \sin 1 \leq \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx \leq 2 \sin 1; \text{ б) } \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3+\sin x}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Можно ли в этих неравенствах знаки нестрогих неравенств заменить знаками строгих?

26. Какое из чисел больше:

$$\text{а) } \int_0^1 e^{-x} \sin x dx \text{ или } \int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx; \text{ б) } \int_0^1 x^2 \sin^2 x dx \text{ или } \int_0^1 x \sin^2 x dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \text{ или } \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx; \text{ г) } \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} dx \text{ или } \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}};$$

$$\text{д) } \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^2+2} dx \text{ или } \frac{\sqrt{2}}{3}; \text{ е) } \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} \text{ или } \frac{e-1}{2};$$

$$\text{ж) } \int_{-2}^3 \arctg x dx \text{ или } \int_{-3}^2 \arctg x dx.$$

27. Какое из чисел больше:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \text{ или } \frac{\pi}{6}; \text{ б) } \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx \text{ или } \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx \text{ или } \frac{\pi}{4} \ln 2; \text{ г) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+x^2+x^3} dx \text{ или } 1?$$

28. Докажите, что если функция f непрерывна на сегменте $[0,1]$, причём

$$\int_0^1 f(x) dx = a \text{ и } 0 \leq f(x) \leq a^{\frac{2}{3}} \text{ (} a > 0 \text{), то } \int_0^1 \sqrt{f(x)} dx \geq a^{\frac{2}{3}}.$$

29. Решите неравенство $\int_{-a}^a e^{100x} dx > 0,04$ относительно a ($a > 0$).

30. Пользуясь первой теоремой о среднем, оцените интеграл:

$$\text{а) } I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x}; \text{ б) } I = \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$$

31. Используя теоремы о среднем, докажите равенство $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

32. Найдите: а) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+\varepsilon x^3}$; б) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x}$, где $a > 0, b > 0$ и

$$0 < \xi < 1.$$

33. Пользуясь второй теоремой о среднем, оцените интеграл

$$\text{а) } \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx \text{ (} \alpha \geq 0; 0 < a < b \text{); б) } \int_a^b \sin(x^2) dx \text{ (} 0 < a < b \text{)}.$$

34. Пользуясь второй теоремой о среднем, докажите равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \text{ (} p > 0 \text{)}.$$

35. Пусть $\int_0^x f(t) dt = xf(\vartheta x)$. Найдите ϑ , если $f(t) = t^n$ ($n > -1$).

36. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, и существуют постоянные $M, \delta > 0$ такие, что для любого сегмента $[\alpha, \beta]$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$) имеет место неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq M |\beta - \alpha|^{1+\delta}.$$

Докажите, что $f(x) \equiv 0$ на сегменте $[a, b]$.

37. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$. Докажите справедливость неравенства Коши–Буняковского:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

38. Используя интегральное неравенство Коши–Буняковского, докажите, что

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^x dx < \sqrt{e-1}.$$

39. Покажите, что $0.78 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0.93$.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Поскольку формула Ньютона–Лейбница позволяет свести вычисление определённого интеграла к вычислению любой его первообразной с последующей двойной подстановкой нижнего и верхнего пределов, то определённые интегралы вычисляются на практике теми же методами, что и неопределённые.

Перечислим три *основных подхода* к интегрированию¹:

- использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований подынтегральной функции, а также свойств интегралов;
- замена переменной интегрирования;
- интегрирование по частям.

В результате применения этих методов интеграл последовательно упрощается и в итоге сводится к вычислению одного или нескольких табличных интегралов (или уже известных интегралов).

Несколько слов об интегрировании разрывных функций. Выше, в параграфе 1, было доказано, что если функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$, причём имеет на нём конечное число точек разрыва, то функция $f(x)$ интегрируема по Риману на указанном сегменте. Рассмотрим два основных подхода к вычислению на практике интегралов от таких функций.

Если по разные стороны от точек своего разрыва подынтегральная функция имеет различные аналитические представления, то, пользуясь свойством аддитивности определённого интеграла, разбивают его на сумму интегралов (точки разбиения промежутка интегрирования совпадают с точками разрыва подынтегральной функции), а затем каждый из полученных интегралов, доопределив подынтегральную функцию до непрерывной и вычислив первообразную, вычисляют при помощи стандартной формулы Ньютона–Лейбница.

Если же на всём промежутке интегрирования (исключая точки разрыва) функция задаётся одной и той же формулой, то первообразная также будет иметь один вид (с точностью до константы), и в этом случае для вычисления

¹ Вычисление определённого интеграла как предела интегральной суммы было рассмотрено в §1.

определённого интеграла вначале методами, приемлемыми для неопределённых интегралов, находят для $f(x)$ одну какую-либо первообразную (непрерывную между соседними точками разрыва $f(x)$); затем вычисляют обобщённую первообразную (непрерывную на всём $[a, b]$ функцию $F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a, b]$, за исключением, возможно, точек разрыва) и после этого применяют формулу Ньютона–Лейбница.

Отметим, что в последнем случае возможным является вычисление определённого интеграла без нахождения обобщённой первообразной. Приведём в связи с этим следующую теорему, имеющую важное теоретическое значение для понимания процедуры вычисления широкого класса определённых интегралов от разрывных функций.

Теорема (формула Ньютона–Лейбница для ограниченных функций, имеющих на сегменте интегрирования конечное число точек разрыва). Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ – такая функция, что $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек c_i ($i = 1, 2, \dots, p$) и концов сегмента a и b , где функция $F(x)$ терпит разрывы первого рода². Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p (F(c_i+0) - F(c_i-0)).$$

Доказательство. Рассмотрим непрерывную на каждом из сегментов $[c_i, c_{i+1}]$ функцию

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (c_i, c_{i+1}); \\ F(c_i+0), & x = c_i; \\ F(c_{i+1}-0), & x = c_{i+1} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p); \quad c_0 = a, c_{p+1} = b.$$

Возьмём теперь произвольное разбиение $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ сегмента $[a, b]$ такое, чтобы точки c_i , $i = 1, 2, \dots, p$, входили в число точек разбиения. Тогда, с одной стороны,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (F_1(x_{k+1}) - F_1(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} F_1'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k, \quad (1)$$

где $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$.

² Функция $F(x)$ не является первообразной для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

(по теореме Лагранжа о конечных приращениях). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (F_1(x_{k+1}) - F_1(x_k)) &= \sum_{i=0}^p (F_1(c_{k+1}) - F_1(c_k)) = \\ &= F_1(c_1) - F_1(c_0) + F_1(c_{p+1}) - F_1(c_p) + \sum_{i=1}^{p-1} (F(c_{i+1} - 0) - F(c_i + 0)) = \\ &= F(b - 0) - F(a + 0) + F(c_1 - 0) - F(c_p + 0) + \\ &+ \sum_{i=1}^{p-1} (F(c_{i+1} - 0) - F(c_i + 0)) = F(b - 0) - F(a + 0) + \\ &+ F(c_1 - 0) - F(c_1 + 0) + F(c_2 - 0) - F(c_2 + 0) + \\ &+ F(c_3 - 0) - F(c_3 + 0) + \dots + F(c_p - 0) - F(c_p + 0) = \\ &= F(b - 0) - F(a + 0) - \sum_{i=1}^p (F(c_i + 0) - F(c_i - 0)). \end{aligned} \quad (2)$$

Переходя к пределу, устремив диаметр разбиения Δ_T к нулю, из (1) получаем

$$\lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (F_1(x_{k+1}) - F_1(x_k)) = \int_a^b f(x) dx.$$

Сопоставляя полученный результат с (2), приходим к выводу, что

$$\int_a^b f(x) dx = F(b - 0) - F(a + 0) - \sum_{i=1}^p (F(c_i + 0) - F(c_i - 0)).$$

Теорема доказана.

Замечание. Разность $F(c_{i+1} + 0) - F(c_i - 0)$ есть величина скачка значений функции F в точках разрыва.

Итак, рассмотрим способы аналитического вычисления определённых интегралов, основанные на использовании формулы Ньютона–Лейбница.

3.1. Интегрирование путём сведения к табличным (известным) интегралам с помощью различных преобразований

Иногда интеграл удаётся вычислить, не прибегая к специальным методам, а просто сводя его к табличным с помощью различных преобразований подынтегрального выражения и используя свойства интегралов. К преобразованиям такого рода относят, например, следующие:

- добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов;
- одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение (например, при интегрировании функций с радикалами иногда полезен приём умножения на сопряжённое выражение);
- выделение полных квадратов (кубов);
- использование формул сокращённого умножения;
- выделение у подынтегральной дроби целой части;
- выделение в числителе дроби производной от знаменателя;
- использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гиперболических формул и т.п.

В частности, при интегрировании гиперболических функций используются известные тождества:

1. Основное гиперболическое тождество: $ch^2 x - sh^2 x = 1$.
2. Формулы одного аргумента:

$$1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}, \quad cth^2 x - 1 = \frac{1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0).$$

3. Формулы двойного аргумента:

$$sh 2x = 2 \cdot sh x \cdot ch x, \quad ch 2x = ch^2 x + sh^2 x.$$

4. Формулы понижения степени: $ch^2 x = \frac{ch 2x + 1}{2}$, $sh^2 x = \frac{ch 2x - 1}{2}$,

$$(ch x + sh x)^n = ch(nx) + sh(nx), \quad (ch x - sh x)^n = ch(nx) - sh(nx) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

5. Формулы сложения: $sh x \pm sh y = 2 sh \frac{x \pm y}{2} ch \frac{x \mp y}{2}$,

$$ch x + ch y = 2 ch \frac{x + y}{2} ch \frac{x - y}{2}, \quad ch x - ch y = 2 sh \frac{x + y}{2} sh \frac{x - y}{2}.$$

6. Формулы суммы и разности двух аргументов:

$$\begin{aligned} sh(x \pm y) &= sh x \cdot ch y \pm sh y \cdot ch x, \quad ch(x \pm y) = ch x \cdot ch y \pm sh x \cdot sh y, \\ th(x \pm y) &= \frac{th x \pm th y}{1 \pm th x \cdot th y}, \quad cth(x \pm y) = \frac{cth x \cdot cth y \pm 1}{cth y \pm cth x} \quad (x \pm y \neq 0). \end{aligned}$$

7. Формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы:

$$sh x \cdot ch y = \frac{1}{2} (sh(x + y) + sh(x - y)),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)), \\ \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)). \end{aligned}$$

Разнообразные задачи с использованием перечисленных выше преобразований рассмотрены в специальных пособиях по интегрированию, например, [16], а также пособиях более широкого профиля, освещающих, в том числе, и этот раздел ([15, 17–18]).

Приведём несколько примеров.

Пример 1. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить определённый интеграл

$$\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx.$$

Решение. Этот интеграл изначально является табличным (от степенной функции):

$$\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx = \left. \frac{x^{4/3}}{4/3} \right|_{-1}^8 = 11 \frac{1}{4}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4 - 1}.$

Решение. Умножим и разделим подынтегральную функцию на два, а затем добавим (и вычтем) в числителе единицу. В результате дробь раскладывается на сумму двух дробей:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{2(x^2 + 1)}.$$

Тогда

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right).$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

Решение. Умножим и разделим подынтегральную дробь на выражение $\sqrt{1+x} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int_0^{1/2} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$

Решение. Заметим, что под знаком квадратного корня находится полный квадрат. Это позволяет избавиться от радикала и тем самым существенно упростить вычисление интеграла:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}}{x^3} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \\ &= \left(\ln|x| - \frac{1}{4x^4} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2} + \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} dx.$

Решение. Разделив многочлен в числителе на $x^2 + 2$, представим его в виде

$$\frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = x + 1 + \frac{1}{x^2 + 2}.$$

Тогда $I = \int_0^1 \left(x + 1 + \frac{1}{x^2 + 2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^1 =$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^1 (2x+7) \sqrt{x^2 + x + 1} dx.$

Решение. Заметим, что $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, и преобразуем интеграл к виду:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 ((2x+1)+6)\sqrt{x^2+x+1}dx = \int_0^1 (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}dx + \\
& \quad + \int_0^1 6\sqrt{x^2+x+1}dx = \\
& = \int_0^1 \sqrt{x^2+x+1}d(x^2+x+1) + 6 \int_0^1 \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx = \\
& = \left(\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+x+1)^3} + 6 \left(\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| \right) \right) \Big|_0^1 = \\
& = \left(\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+x+1)^3} + 3 \left(\left(x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{4} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| \right) \right) \Big|_0^1 = \\
& = \frac{31}{2} \sqrt{3} - \frac{13}{6} + \frac{9}{4} \ln(1+2\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x - \sin 5}$.

Решение. Имеем $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x - \sin 5} = \frac{1}{2 \cos 5} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos \left(\frac{x-5}{2} - \frac{x+5}{2} \right)}{\sin \frac{x-5}{2} \cos \frac{x+5}{2}} dx =$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2 \cos 5} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos \frac{x-5}{2} \cos \frac{x+5}{2} + \sin \frac{x-5}{2} \sin \frac{x+5}{2}}{\sin \frac{x-5}{2} \cos \frac{x+5}{2}} dx = \\
& = \frac{1}{2 \cos 5} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{\cos \frac{x-5}{2}}{\sin \frac{x-5}{2}} + \frac{\sin \frac{x+5}{2}}{\cos \frac{x+5}{2}} \right) dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{\cos 5} \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{d \left(\sin \frac{x-5}{2} \right)}{\sin \frac{x-5}{2}} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{d \left(\cos \frac{x+5}{2} \right)}{\cos \frac{x+5}{2}} \right) = \\
& = \frac{1}{\cos 5} \left(\ln \left| \sin \frac{x-5}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x+5}{2} \right| \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \\
& = \frac{1}{\cos 5} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-5}{2}}{\cos \frac{x+5}{2}} \right| \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{1}{\cos 5} \left(\ln \left| \frac{\sin \frac{\pi/2-5}{2}}{\cos \frac{\pi/2+5}{2}} \right| - \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi/6-5}{2}}{\cos \frac{\pi/6+5}{2}} \right| \right) = \\
& = \frac{1}{\cos 5} \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi/2-5}{2} \cdot \cos \frac{\pi/6+5}{2}}{\cos \frac{\pi/2+5}{2} \cdot \sin \frac{\pi/6-5}{2}} \right|.
\end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

Решение. $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{100\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{100\pi} |\sin x| dx =$

$$\begin{aligned}
& = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{99} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin x| dx = 100 \sqrt{2} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = 100 \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \\
& = 100 \sqrt{2} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 200 \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию по тригонометрическим формулам:

$$\sin x (\sin 2x \sin 3x) = \sin x \left(\frac{1}{2} (\cos x - \cos 5x) \right) =$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}(\sin 6x - \sin 4x) = \frac{1}{4}(\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x).$$

Тогда $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 6x}{6} - \frac{\cos 4x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int_0^2 shx \cdot sh2x \cdot sh3x dx.$

Решение. Последовательно применяя формулы преобразования произведения гиперболических функций в суммы

$$sh\alpha \cdot sh\beta = \frac{1}{2}(ch(\alpha + \beta) - ch(\alpha - \beta)),$$

$$sh\alpha \cdot ch\beta = \frac{1}{2}(sh(\alpha + \beta) + sh(\alpha - \beta)),$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^2 shx \cdot sh2x \cdot sh3x dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 sh2x \cdot (ch4x - ch2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 (sh6x - sh2x - sh4x) dx = \\ &= \left(\frac{ch6x}{24} - \frac{ch4x}{16} - \frac{ch2x}{8} \right) \Big|_0^2 = \frac{ch12}{24} - \frac{ch8}{16} - \frac{ch4}{8} - \frac{7}{48}. \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int_0^{\ln 2} sh^4 x dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию с помощью формул понижения степени для гиперболических функций:

$$sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}, \quad ch^2 2x = \frac{ch4x + 1}{2}.$$

Тогда $sh^4 x = \frac{1}{4} \left(\frac{ch4x + 1}{2} - 2ch2x + 1 \right) = \frac{1}{8}(ch4x - 4ch2x + 3).$ Интег-

рируя, получаем

$$\int_0^{\ln 2} sh^4 x dx = \frac{1}{8} \left(\frac{sh4x}{4} - 2sh2x + 3x \right) \Big|_0^{\ln 2} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4 \ln 2} - e^{-4 \ln 2}}{8} - 2 \frac{e^{2 \ln 2} - e^{-2 \ln 2}}{2} + 3 \ln 2 \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{16 - 1/16}{8} - 4 + \frac{1}{4} + 3 \ln 2 \right) = \frac{3 \ln 2}{8} - \frac{225}{1024}. \end{aligned}$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{sh^2 x \cdot ch^2 x}.$

Решение. Пользуясь основным гиперболическим тождеством $ch^2 x - sh^2 x = 1$, представим единицу в числителе дроби как гиперболическую единицу:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{sh^2 x \cdot ch^2 x} &= \int_1^3 \frac{ch^2 x - sh^2 x}{sh^2 x \cdot ch^2 x} dx = \int_1^3 \frac{dx}{sh^2 x} - \int_1^3 \frac{dx}{ch^2 x} dx = \\ &= (-cth x - th x) \Big|_1^3 = -cth 3 - th 3 + cth 1 + th 1. \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислить интеграл от разрывной функции:

$$\int_1^{n+1} \ln[x] dx, \text{ где } n \in N, [x] - \text{целая часть числа } x.$$

Решение. Известно, что функция $y = [x]$ терпит разрывы 1-го рода в тех точках, где её аргумент принимает целочисленные значения. Найдём точки разрыва подынтегральной функции: $x_k = 2, 3, \dots, n$. На каждом из промежутков $[k, k+1)$, где $k = 1, 2, \dots, n$, имеем $\ln[x] = \ln k$, поэтому

$$\int_1^{n+1} \ln[x] dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln x dx = \sum_{k=1}^n \ln k \int_k^{k+1} dx = \sum_{k=1}^n \ln k = \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \ln(n!).$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 2^{1/x}} \right) dx.$

Решение. Заметим, что функция $F(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$ не является первообразной для подынтегральной функции на сегменте $[-1, 1]$, поскольку $F(x)$ разрывна в точке $x = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = 0$). Поэтому вычисление данного интеграла по формуле Ньютона–Лейбница с использованием этой

функции в качестве первообразной было бы неправомерным и привело бы к неверному результату. Однако, используя функцию $F(x)$, можно найти первообразную на всём сегменте $[-1, 1]$. Для этого рассмотрим функцию

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(x), & -1 \leq x < 0; \\ 1, & x = 0; \\ F(x) + 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

В отличие от $F(x)$, она уже является непрерывной на $[-1, 1]$, причём $\bar{F}'(x) = F'(x)$ для любого $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, т.е. её производная совпадает с подынтегральной функцией. Поэтому, по определению, данная функция является первообразной (в обобщённом смысле) для подынтегральной функции на сегменте $[-1, 1]$. Теперь по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + 2^{1/x}} = \bar{F}(1) - \bar{F}(-1) = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \frac{1}{1 + 0,5} = \frac{2}{3}.$$

3.2. Интегрирование путём замены переменной

Изложим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций – *метод замены переменной*, или *метод подстановки*, в применении к определённым интегралам. Рассмотрим две теоремы.

Теорема 1 (внесение функции $t'(x)$ под знак дифференциала). Пусть дан определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, в котором подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где

1) $t = t(x)$ – непрерывно дифференцируемая на сегменте $[a, b]$ функция, и $[c, d]$ – множество её значений на $[a, b]$;

2) функция $g(t)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$.

Тогда справедлива следующая формула перехода от переменной интегрирования x к новой переменной интегрирования t :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(t(x)) \cdot t'(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} g(t)dt. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть функция $G(t)$ является первообразной для

функции $g(t)$ на сегменте $[c, d]$ (она существует в силу того, что функция $g(t)$ непрерывна на этом сегменте). Тогда

$$\int_{t(a)}^{t(b)} g(t)dt = G(t(b)) - G(t(a)).$$

С другой стороны, по правилу дифференцирования сложной функции, $(G(t(x)))' = g(t(x)) \cdot t'(x)$ для любого $x \in [a, b]$. Значит, функция $G(t(x))$ является первообразной для $g(t(x)) \cdot t'(x)$ на $[a, b]$, и по формуле Ньютона–

Лейбница получаем $\int_a^b g(t(x))t'(x)dx = G(t(b)) - G(t(a))$.

Теорема доказана.

Замечание 1. К новой переменной интегрирования t переходят в тех случаях, когда получаемая в результате новая подынтегральная функция $g(t)$ удобнее для интегрирования по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt .

Замечание 2. Обращаем внимание на то, что в этом утверждении не предполагается монотонности функции $t(x)$. Более того, не предполагается, что множество значений $[c, d]$ функции $t = t(x)$ совпадает с сегментом $E = [\min(t(a), t(b)), \max(t(a), t(b))]$ ($E \subseteq [c, d]$) (см. рис. 1).

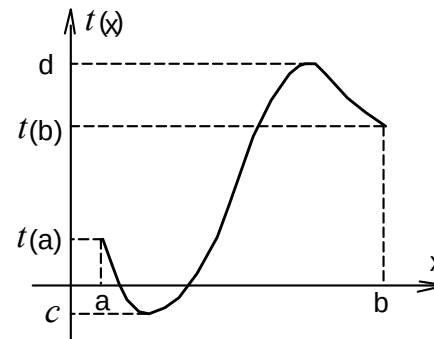


Рис. 1.

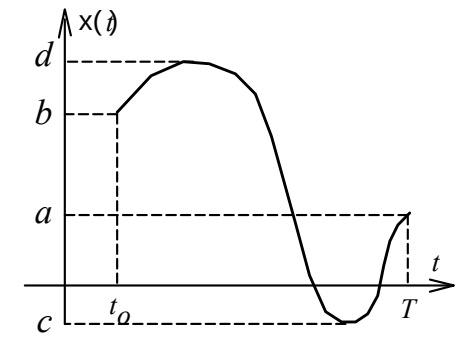


Рис. 2.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 x(3x^4 - 4x^2 + 1)dx$.

Решение. С одной стороны,

$$\int_{-1}^2 x(3x^4 - 4x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^6}{2} - x^4 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 = 18.$$

Теперь вычислим данный интеграл методом замены переменной:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x(3x^4 - 4x^2 + 1)dx &= \int_{-1}^2 (x^3 - x)(3x^2 - 1)dx = \int_{-1}^2 (x^3 - x)d(x^3 - x) = \\ &= \int_0^6 tdt = 18 \end{aligned}$$

(применение теоремы 1 было правомерно, поскольку

1) функция $t(x) = x^3 - x$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1, 2]$, причём множеством значений этой функции на $[-1, 2]$ является сегмент $\left[-2/(3\sqrt{3}), 6\right]$;

2) функция $g(t) = t$ непрерывна на сегменте $\left[-2/(3\sqrt{3}), 6\right]$).

Теорема 2 (использование подстановки $x = x(t)$). Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $x = x(t)$ – непрерывно дифференцируемая на сегменте $[t_0, T]$ функция, и сегмент $[c, d]$ – множество её значений на $[t_0, T]$;
- 2) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$;
- 3) $x(t_0) = a$, $x(T) = b$.

Тогда справедлива следующая формула перехода от переменной интегрирования x к новой переменной t :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^T f(x(t)) \cdot x'(t)dt. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на сегменте $[c, d]$. Тогда функция $F(x(t))$ является первообразной для $f(x(t))x'(t)$ на сегменте $[t_0, T]$. В самом деле, $F'(x(t)) = f(x(t))x'(t)$ по правилу дифференцирования сложной функции. Значит, согласно формуле

Ньютона–Лейбница,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x(T)) - F(x(t_0)) = \int_{t_0}^T f(x(t)) \cdot x'(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3. В этом утверждении также не предполагается монотонность функции $x(t)$ и то, что множество значений $[c, d]$ функции $x = x(t)$ совпадает с сегментом $G = [\min(x(t_0), x(T)), \max(x(t_0), x(T))]$ ($G \subseteq [c, d]$) (см. рис. 2 выше).

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе, культуру интегрирования учащегося.

Подчеркнём ещё раз, что замена переменной – наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций. Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях – целое искусство. В некоторых случаях удаётся сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок рассмотрены в пособии [16].

Формальное применение формул (1) и (2) при замене переменной (без проверки условий их применимости) может привести к неверным результатам. Рассмотрим примеры.

Пример 2. Возможно ли вычисление интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с помощью подстановки $t = 1/x$?

Решение. Нет. Если сделать формально подстановку $x = \frac{1}{t}$ (не проверяя условий её применимости в данной задаче), то придём к неверному результату:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^1 \frac{d(1/t)}{1+(1/t)^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = - \arctgt|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

На самом деле, если воспользоваться соответствующим табличным интегралом, то получим другое (верное!) значение:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ошибка в первом случае связана с тем, что изменению x на сегменте $[-1, 1]$ соответствует изменение $t = \frac{1}{x}$ не на сегменте $[-1, 1]$, а на объединении полупрямых $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Тем самым, указанная замена просто не удовлетворяет требованиям теоремы 2 о замене переменной, и вычислять интеграл с её помощью нельзя.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x}$.

Решение. 1-й способ. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+0,5 \cos x}$ непрерывна на сегменте $[0, 2\pi]$ и, следовательно, имеет первообразную. Для нахождения первообразной подходящей заменой является $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Однако для последующего вычисления определённого интеграла по сегменту $[0, 2\pi]$ такая замена не удовлетворяет условиям теоремы 1 о замене переменной, поскольку изменению переменной x на сегменте $[0, 2\pi]$ не отвечает изменение переменной t на некотором сегменте ($t \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow \pi \mp 0$). Нарушается и условие непрерывной дифференцируемости функции $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ на $[0, 2\pi]$ (эта функция разрывна в точке $x = \pi$).

Воспользуемся указанной заменой лишь для нахождения какой-либо первообразной подынтегральной функции на данном промежутке интегрирования. Для этого рассмотрим неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{1+0,5 \cos x}$. На каждом из промежутков $0 \leq x < \pi$ и $\pi < x \leq 2\pi$ для него допустима замена переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. При этом $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, и мы получаем

$$F(x) = \int \frac{dx}{1+0,5 \cos x} = 4 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C.$$

При любом значении константы C функция $F(x)$ является первообразной для $f(x) = \frac{1}{1+0,5 \cos x}$ на каждом из промежутков $[0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi]$. Но так как она имеет в точке $x = \pi$ разрыв 1-го рода: $F(\pi+0) - F(\pi-0) = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$, то $F(x)$ не является первообразной для $f(x)$ на всём сегменте $[0, 2\pi]$. Однако с помощью $F(x)$ теперь уже легко построить первообразную $\bar{F}(x)$ для $f(x)$ на сегменте $[0, 2\pi]$:

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}, & \text{если } 0 \leq x < \pi; \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & \text{если } x = \pi; \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + \frac{4\pi}{\sqrt{3}}, & \text{если } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(эта функция непрерывна на $[0, 2\pi]$, причём её производная на этом сегменте совпадает с $f(x)$). Тогда по формуле Ньютона–Лейбница получаем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x} = \bar{F}(2\pi) - \bar{F}(0) = \left(0 + \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\right) - 0 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

2-й способ. Можно было бы (чаще поступают именно так) вычислить данный интеграл, разбив его на два интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x},$$

и воспользоваться тем, что первообразной для $f(x)$ на $[0, \pi]$ является функция

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}, & \text{если } 0 \leq x < \pi; \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & \text{если } x = \pi; \end{cases}$$

а на $[\pi, 2\pi]$ – функция

$$F_2(x) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & \text{если } x = \pi; \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}, & \text{если } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

($F_1(x)$ получается из $F(x)$ при $C = 0$ с помощью доопределения $F(x)$ в точке $x = \pi$ по непрерывности слева, а $F_2(x)$ – справа). В этом случае, применяя формулу Ньютона–Лейбница к каждому из интегралов, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} = F_1(x) \Big|_0^{\pi} + F_2(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_2(\pi) = \\ = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 0 + 0 - \left(-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

Пример 4. Применяя подходящую замену переменной, найти интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}; \text{ б) } \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0); \text{ в) } \int_{-\frac{1}{32}}^1 \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^3}}\right)^2};$$

$$\text{г) } \int_0^1 f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}, & x \neq 0; \\ \sqrt{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. а) Положим $t = \sqrt{5-4x}$ (условия теоремы 1 выполняются: функция $t = \sqrt{5-4x}$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1, 1]$; её множеством значений является отрезок $[1, 3]$; кроме того, функция $g(t) = \frac{1}{4t}(5-t^2)$ непрерывна на $[1, 3]$), тогда $dx = -\frac{1}{2}t dt$ и приходим к интегралу

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} = \frac{1}{8} \int_1^3 (5-t^2) dt = \frac{1}{8} \left(5t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{6}.$$

б) Выполним тригонометрическую подстановку: $x = a \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$ (условия теоремы 2 выполняются: функция $x = a \sin t$ непрерывно диффе-

ренцируема на сегменте $[0, \pi/2]$, причём сегмент $[0, a]$ является множеством её значений; функция $f(x) = x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$ непрерывна на сегменте $[0, a]$; $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = a$). Тогда $dx = a \cos t dt$ и получаем

$$I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 \cos^2 t} a \cos t dt = \\ = a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t |\cos t| \cos t dt.$$

Учитывая, что $|\cos t| = \cos t$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, окончательно находим

$$I = a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \\ = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

в) Продемонстрируем на данном примере, что при замене переменной в интеграле Римана может возникнуть несобственный интеграл 1-го рода. Так, применяя метод интегрирования дифференциального бинома, сделаем замену

$t = \sqrt[3]{1+x}^{-\frac{3}{5}}$. Функция $t(x)$ непрерывно дифференцируема на полуинтервалах $\left[-\frac{1}{32}, 0\right)$ и $(0, 1]$, точка $x = 0$ является особой точкой $t(x)$, причём

$\lim_{x \rightarrow 0-0} t(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} t(x) = +\infty$. Поэтому интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int_{-\frac{1}{32}}^1 \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^3}}\right)^2} = \int_{-\frac{1}{32}}^0 \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^3}}\right)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^3}}\right)^2} = \\ = -5 \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(1-t^3)^2} - 5 \int_{+\infty}^{-\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{(1-t^3)^2} = 5 \int_{-\infty}^{-\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{(1-t^3)^2} + 5 \int_{\sqrt[3]{2}}^{+\infty} \frac{dt}{(1-t^3)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \left(\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(t-1)^3}{t^3-1} \right| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg|_{-\infty}^{-\sqrt[3]{7}} + \\
&+ 5 \left(\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(t-1)^3}{t^3-1} \right| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{2}}^{+\infty} = \\
&= \frac{5}{8} \sqrt[3]{7} - 5 \sqrt[3]{2} + 5 \ln \frac{1+\sqrt[3]{7}}{2} - 5 \ln (\sqrt[3]{2}-1) - \frac{10\pi}{3} + \\
&+ \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}} + \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

г) Покажем, что при замене переменной в интеграле Римана может возникнуть и несобственный интеграл 2-го рода. Функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$. После замены $t = \sqrt{1-x^2}$ получаем

$$\int_0^1 f(x) dx = - \int_1^0 \frac{t dt}{\sqrt{1-t}} = \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t}} = \left(\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1-t} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}$$

(в интеграле $\int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t}}$ подынтегральная функция не ограничена на $[0,1)$).

Пример 5. Вычислить интеграл, внося необходимую функцию под знак дифференциала, но не вводя новой переменной: $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1}$.

$$\begin{aligned}
\text{Решение. } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1} &= \int_{-1}^1 \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \\
&- \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right) \Bigg|_{-1}^1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \Bigg|_{-1}^1 = \\
&= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Пример 6. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0,1]$, то справедливы интегральные равенства:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Доказательство. а) Выполним в интеграле $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ подстановку

$t = \frac{\pi}{2} - x$ (при этом пределы интегрирования только поменяются местами):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) d\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

б) Выполним в интеграле $I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$ подстановку $t = \pi - x$ (при этом пределы интегрирования сохраняются прежними, только поменяются местами):

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) d(\pi - t) = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt = \\
&= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt.
\end{aligned}$$

Из полученного равенства $I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - I$, выражая I , находим:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Рассмотрим пример, в котором использование доказанной формулы позволяет быстро упростить вычисление интеграла.

Пример 7. Найти $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Решение. В силу предыдущего примера, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_0^{\pi} x \underbrace{\frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}}_{f(\sin x)} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

3.3. Интегрирование по частям

Теорема 1 (интегрирование по частям). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны вместе со своими производными (1-го порядка) на сегменте $[a, b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x), \text{ где}$$

$$f(x)g(x) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Эта формула в интегральном исчислении называется *формулой интегрирования по частям* (иногда *формулой приведения*).

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения имеем: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Значит,

$$\int_a^b (f(x)g(x))' dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad (1)$$

Но функция $f(x)g(x)$, очевидно, является первообразной для $(f(x)g(x))'$ на сегменте $[a, b]$. Значит, по формуле Ньютона–Лейбница $\int_a^b (f(x)g(x))' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. Подставляя в (1), получаем требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Существует обобщение формулы интегрирования по частям:

$$\int_a^b f g^{(n+1)} dx = \left(f \cdot g^{(n)} - f' \cdot g^{(n-1)} + \dots + (-1)^n f^{(n)} \cdot g \right) \Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)} g dx$$

где функции f, g и все встречающиеся производные предполагаются непрерывными на $[a, b]$.

Пример 1. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы

$$\text{а) } \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx; \text{ б) } \int_{1/e}^e |\ln x| dx; \text{ в) } \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$$

Решение.

$$\text{а) } \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = -e^{-x} x \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = -e^{-\ln 2} \ln 2 - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}.$$

$$\text{б) } \text{Поскольку } |\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & x \in [1/e, 1] \\ \ln x, & x \in [1, e] \end{cases} \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \int_{1/e}^e |\ln x| dx &= \int_{1/e}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx = (-x \ln x + x) \Big|_{1/e}^1 + \\ &+ (x \ln x - x) \Big|_1^e = 2(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

$$\text{в) } \text{Положим } f = \operatorname{arctg} x, \quad dg = x dx, \text{ тогда } df = \frac{dx}{1+x^2}, \quad g = \frac{x^2}{2}:$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2. Найти интегралы: а) $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$; б) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Решение. Положим $f = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $dg = dx$, тогда

$$df = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x}{x+1}}} \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} \right)' = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}, \quad g = x$$

и, интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \\ &= \int_0^3 \frac{(\sqrt{x})^2 d\sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^2} = \pi - \int_0^3 \frac{1 + (\sqrt{x})^2 - 1}{1 + (\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) = \\ &= \pi - \sqrt{x} \Big|_0^3 + \operatorname{arctg} \sqrt{x} \Big|_0^3 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

б) Применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int_0^{\pi} x \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = - \int_0^{\pi} x d(\operatorname{arctg}(\cos x)) = \\ &= -x \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx = \frac{\pi^2}{4} + I_1, \end{aligned}$$

где $I_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx$.

Чтобы найти I_1 , заметим, что график функции $\operatorname{arctg}(\cos x)$ центрально симметричен относительно точки $(\pi/2; 0)$. Поэтому интегралы от этой функции по сегментам $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$ равны по модулю и противополо-

жны по знаку, а значит, в сумме равны нулю, т.е. $I_1 = 0$. Этот же факт можно было установить следующим образом: разобьём I_1 на два интеграла по сегментам $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$, и во втором интеграле сделаем замену переменной $x = \pi - t$. Получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx + \\ &+ \int_{\pi/2}^0 \operatorname{arctg}(-\cos t)(-dt) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos t) dt = 0. \end{aligned}$$

Итак, $I_1 = 0$, поэтому $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Пример 3. Найти интеграл Эйлера (бета-функцию)³

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (m, n \in N).$$

Решение. Полагая $dg = x^{m-1} dx$, $f = (1-x)^{n-1}$ и интегрируя по частям, получим

$$B(m, n) = \frac{x^m (1-x)^{n-1}}{m} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1).$$

Применяя последовательно полученную формулу понижения (по n), находим

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{m(m+1) \dots (m+n-2)} B(m+n-1, 1) = \\ &= \frac{(n-1)!}{m(m+1) \dots (m+n-2)} \int_0^1 x^{m+n-2} dx = \\ &= \frac{(n-1)!}{m(m+1) \dots (m+n-2)(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}. \end{aligned}$$

³ Подробнее свойства Эйлеровых интегралов (бета- и гамма- функций) изучаются в разделе «Интегралы, зависящие от параметров» (как правило, на втором году обучения в университете).

Пример 4. Найти интегралы:

$$\text{а) } I_1 = \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx; \text{ б) } I_2 = \int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx.$$

Решение. Заметим, что гораздо проще вычислить не отдельно данные интегралы, а их сумму и разность:

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\pi} x^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^3}{3},$$

$$I_2 - I_1 = \int_0^{\pi} x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Таким образом, } I_1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right), \quad I_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \right).$$

Пример 5. Вывести формулу понижения степени и с её помощью вычислить интегралы:

$$\text{а) } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx; \text{ б) } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Решение. а) Пусть $f = \sin^{n-1} x$, $dg = \sin x dx$. Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

откуда получаем формулу понижения степени: $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

С помощью найденной рекуррентной формулы легко получить значение интеграла для любого натурального n .

Пусть $n = 2k$, тогда

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\text{так как } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $n = 2k+1$, тогда

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)(2k-4) \cdot \dots \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} \cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

$$\text{так как } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

б) В силу примера 6 п. 3.2. имеем

$$J_n = I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

Решение. Полагая $x = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, находим

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \quad (\text{см. предыдущий пример}).$$

Следующий пример показывает, что в некоторых случаях интегрирование по частям возможно и тогда, когда выполнены не все условия теоремы 1.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Решение. Функция $\arcsin x$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[0, 1-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$, но не является такой на отрезке $[0, 1]$. Поэтому, согласно теореме 1, интегрирование по частям допустимо только на сегмен-

тах вида $[0, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Но так как интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$ существует

(функция $\arcsin x$ непрерывна на $[0, 1]$), то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \arcsin x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(x \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left((1-\varepsilon) \arcsin(1-\varepsilon) + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) = \frac{\pi}{2} - 1, \end{aligned}$$

т.е.

$$\int_0^1 \arcsin x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \arcsin x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (F(1-\varepsilon) - F(0)) = F(1) - F(0),$$

где непрерывная функция $F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ – первообразная для $\arcsin x$ на сегменте $[0, 1]$.

На практике такого рода интегралы можно вычислять без введения символа предела. Так, в данном случае

$$\int_0^1 \arcsin x dx = (x \arcsin x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3.4. Другие способы вычисления определённых интегралов

Рассмотренными выше основными подходами не исчерпываются все известные методы вычисления определённых интегралов. Существуют и другие – принципиально иные – приёмы.

Пусть, например, необходимо вычислить интеграл $I(m) = \int_a^b f(x, m) dx$, в котором подынтегральная функция f зависит не только от переменной величины x , но и от некоторого числового параметра m . При определённых условиях, рассматривая интеграл $I(m)$ как функцию параметра m , можно продифференцировать этот интеграл по параметру, руководствуясь правилом:

$$\frac{d}{dm} \left(\int_a^b f(x, m) dx \right) = \int_a^b \frac{df(x, m)}{dm} dx, \quad (1)$$

вычислить образовавшийся интеграл $I'(m) = \int_a^b f'_m(x, m) dx$ (может оказаться,

что он вычисляется проще, чем исходный интеграл $I(m)$), и затем проинтегрировать полученную функцию $I'(m)$ по параметру m : $\int I'(m) dm$. В результате интеграл $I(m)$ оказывается вычисленным с точностью до константы, возникающей в процессе интегрирования. Значение константы определяется, исходя из начальных условий или свойств подынтегральной функции. Таким образом, исходный интеграл оказывается полностью вычисленным.

Строгое обоснование возможности дифференцирования по параметру под знаком интеграла обычно проходят на 2-м курсе в разделе «Интегралы, зависящие от параметра». Поэтому сейчас мы не будем заострять внимание на обосновании возможности дифференцирования по параметру, считая, тем не менее, важным хотя бы в общих чертах ознакомить студента с существованием такого подхода в практике вычисления определённых интегралов. Рассмотрим пример, в котором используется данный приём дифференцирования по параметру под знаком интеграла.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ($a > 0, b > 0$).

Решение. Обозначим подынтегральную функцию $f(x, b) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ и

рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ как функцию $I(b)$ параметра b . Про-

дифференцируем $I(b)$ по параметру b , пользуясь формулой (1):

$$\begin{aligned} I'(b) &= \frac{d}{db} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^b - x^a}{\ln x} \right)'_b dx = \int_0^1 \frac{x^b \ln x}{\ln x} dx = \\ &= \int_0^1 x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{b+1}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученную функцию: $\int \frac{db}{b+1} = \ln(b+1) + C$. Итак,

$I(b) = \ln(b+1) + C$ при некотором значении константы C . Найдём C : так

как $I(b)$ при $b = a$ обращается в нуль, то отсюда получаем $\ln(a+1) + C = 0$, т.е. $C = -\ln(a+1)$. Окончательно, $I(b) = \ln \frac{b+1}{a+1}$.

Отметим также, что существует довольно широкий класс несобственных интегралов, вычисляемых путём сведения их к эйлеровым интегралам (гамма- и бета-функциям). Этот способ вычисления изучается после ознакомления (как правило, позже – на 2-м курсе обучения) со свойствами эйлеровых интегралов.

3.5. Интегрирование специальных классов функций

В теме «Неопределённый интеграл», которую в высшей школе обычно изучают перед тем, как приступить к определённым интегралам, рассматриваются способы интегрирования дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, гиперболических, показательных, логарифмических и некоторых других классов функций. Формула Ньютона–Лейбница позволяет воспользоваться знанием первообразной для вычисления аналогичного определённого интеграла. Поэтому в данной книге мы не останавливаемся на соответствующих методах вычисления определённых интегралов от указанных классов функций.

Ограничимся примером, демонстрирующим вычисление интеграла от дробно-рациональной функции при помощи метода Остроградского.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$.

Решение. Отметим, что на промежутке интегрирования подынтегральная функция не имеет особенностей, и вычислим вначале соответствующий неопределённый интеграл. Поскольку

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2,$$

то разложение по формуле Остроградского ищем в виде

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} dx.$$

Далее методом неопределённых коэффициентов ищутся значения A, B, C и D . А именно, дифференцируя последнее равенство и приводя дроби к общему знаменателю, в результате приравнивания числителей получаем тождество

$$1 \equiv A(x^2 + x + 1) - (Ax + B)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(Cx + D),$$

Решая систему уравнений

$$\begin{aligned} x^3 : \quad & 0 = C, \\ x^2 : \quad & 0 = -A + D + C, \\ x^1 : \quad & 0 = D - 2B + C, \\ x^0 : \quad & 1 = A - B + D, \end{aligned}$$

находим $A = D = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$. Подставляя эти коэффициенты в формулу Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} &= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \\ &= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к окончательному результату:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left(\frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Ниже рассматриваются особенности интегрирования периодических функций, функций, имеющих на промежутке интегрирования ось или центр симметрии, а также взаимно обратных функций.

3.5.1. Интегрирование периодических функций

Теорема 1. Пусть периодическая с периодом T функция $f(x)$ интегрируема на каждом конечном сегменте. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx.$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x+T) dx = \int_a^b f(x+T) d(x+T) = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx.$$

Теорема 2. Пусть непрерывная функция $f(x)$ является периодической с периодом $T \neq 0$. Тогда для любого действительного a справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(интеграл от периодической функции по любому отрезку, длина которого равна периоду, всегда принимает одно и то же значение).

Доказательство. Обозначим $\Phi(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx$. Тогда

$\Phi'(a) = f(a+T) - f(a) \equiv 0$, значит, $\Phi(a) = \text{const}$. Однако

$$\Phi(0) = \int_0^T f(x)dx - \int_0^T f(x)dx = 0.$$

Отсюда следует, что $\Phi(a) \equiv 0$, т.е. $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ для любого a .

Теорема 3. Пусть непрерывная на всей числовой прямой функция f является периодической с периодом T . Тогда первообразная F функции f является периодической (с тем же периодом) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T f(t)dt = 0.$$

Доказательство. 1) **Необходимость.** Рассмотрим произвольную первообразную для функции f : $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$. Из периодичности F с периодом T следует, что $F(T) = \int_0^T f(t)dt + C = F(0) = C$, откуда

$$\int_0^T f(t)dt = 0.$$

2) **Достаточность.** Если $\int_0^T f(t)dt = 0$, то имеем

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t+T)dt + C = \int_T^{T+x} f(\tau)d\tau + C = \\ &= \int_0^T f(\tau)d\tau + \int_T^{T+x} f(\tau)d\tau + C = F(x+T). \end{aligned}$$

3.5.2. Интегрирование функций, график которых имеет ось (центр) симметрии в середине промежутка интегрирования

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-a, a]$, симметричном относительно $x = 0$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

Доказательство. а) Пусть $f(x)$ – чётная функция. Воспользуемся свойством аддитивности определённого интеграла

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$$

сделаем в первом из получившихся интегралов замену $t = -x$, и учтём после этого чётность подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx &= \int_a^0 f(-t)d(-t) + \int_0^a f(x)dx = \\ &= \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx. \end{aligned}$$

б) Случай, когда $f(x)$ – нечётная функция, рассматривается аналогично.

Следствие. 1) Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, и её график имеет на этом сегменте ось симметрии $x = \frac{a+b}{2}$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx.$$

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, и её график имеет на этом сегменте центр симметрии в точке $\left(\frac{a+b}{2}; 0\right)$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 3 \arcsin^5 x + 7x^4 \arctg(\sqrt[5]{x}))dx.$$

Решение. Интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечётная (как сумма нечётных функций), а промежуток интегрирования симметричен относительно точки $x = 0$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx$.

Решение. Заметим, что график подынтегральной функции $\operatorname{arctg}(\cos x)$ центрально симметричен относительно точки $(\pi/2; 0)$, абсцисса которой является серединой сегмента интегрирования $[0, \pi]$. Поэтому интегралы от этой функции по сегментам $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$ равны по модулю и противоположны по знаку, а значит, в сумме равны нулю. Итак, искомый интеграл равен нулю.

3.5.3. Интегрирование взаимно обратных функций

Теорема. Пусть функция f дифференцируема и обратима на сегменте $[a, b]$, g – обратная для f функция, определённая на $f([a, b])$. Тогда функция

$$F(x) = xf'(x) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy$$

является первообразной для функции f на $[a, b]$.

Доказательство. Действительно, пользуясь определением первообразной и свойством $g(f(x)) \equiv x$, получаем

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - g(f(x))f'(x) = f(x).$$

Следствие. Интеграл от обратимой функции f по сегменту $[a, b]$ связан с интегралом от обратной к ней функции g по сегменту $f([a, b])$ посредством равенства:

$$\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$

Доказательство этого факта немедленно получается, если к функции f применить формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = bf(b) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy - \left(af(a) - \int_{f(a)}^{f(a)} g(y) dy \right) =$$

$$= bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$.

Решение. Подынтегральная функция

$$y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{1+x}}$$

неотрицательна, дифференцируема и возрастает на сегменте $[0, 3]$. Выражая

из равенства $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ переменную x через y , найдём её обрат-

ную функцию: $g(y) = \frac{\sin^2 y}{1 - \sin^2 y}$. По теореме, доказанной выше, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx &= 3 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \arcsin 0 - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 y}{1 - \sin^2 y} dy = \\ &= \pi + \int_0^{\pi/3} \frac{(1 - \sin^2 y) - 1}{1 - \sin^2 y} dy = \\ &= \pi + \int_0^{\pi/3} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 y} \right) dy = \pi + (y - \operatorname{tg} y) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к § 3

**Задачи на вычисление определённых интегралов
без использования замены переменной и интегрирования по частям**

1. Используя геометрический смысл определённого интеграла как площади криволинейной трапеции и изобразив эскизы графиков подынтегральных функций, вычислите:

$$\text{а) } \int_0^2 \left[x + \frac{1}{2} \right] dx; \text{ б) } \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ x - \frac{1}{2} \right\} - 1 dx; \text{ в) } \int_{-1}^3 \|x - 1\| - 1 dx;$$

$$\text{г) } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx; \text{ д) } \int_0^{2\pi} \sqrt{2\pi x - x^2} dx.$$

2. Вычислите интегралы

$$\text{а) } \int_{-1}^1 f(x) dx, \text{ где } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}; \text{ б) } \int_{-2}^1 f(x) dx, \text{ где } f(x) = |x|$$

двумя способами: 1) вначале используя свойство аддитивности интеграла;
2) сразу с помощью формулы Ньютона–Лейбница.

3. Найдите интегралы:

$$\text{а) } \int_0^2 f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{если } 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \int_0^1 f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq t; \\ t \frac{1-x}{1-t}, & \text{если } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4. Найдите ошибку в рассуждениях при вычислении следующих интегралов:

$$\text{а) } \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} \Big|_0^2 = -2;$$

$$\text{б) } \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = 0;$$

$$\text{в) } \int_{-1}^1 \frac{4}{3} \sqrt{x^{\frac{2}{3}}} dx = \frac{4}{3} \int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx = x^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

5. Вычислите определённый интеграл от ограниченной разрывной функции, разбивая промежуток интегрирования на части так, чтобы на каждой из них однозначно раскрывалась целая часть (используя свойство аддитивности):

$$\int_0^2 [e^x] dx.$$

6. Вычислите интегралы от ограниченных разрывных функций:

$$\text{а) } \int_0^x f(t) dt, \text{ где } f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < l; \\ 0, & |t| > l; \end{cases}; \text{ б) } \int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx;$$

$$\text{в) } \int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx.$$

7. Вычислите интегралы от ограниченных разрывных функций:

$$\text{а) } \int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx; \text{ б) } \int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x)) dx; \text{ в) } \int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx, \text{ где } E$$

– множество тех значений сегмента $[0, 4\pi]$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

8. Вычислите интеграл

$$\int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

9. Пусть дифференцируемая на сегменте $[0, 3]$ функция $y = f(x)$ в точках $x = 1$ и $x = 3$ имеет локальные минимумы $y_{\min} = 2$ и $y_{\min} = 0$ соответственно, а в точках $x = 0$ и $x = 2$ – локальный максимум $y_{\max} = 4$.

$$\text{Вычислите } \int_0^3 |f'(x)| dx.$$

Замена переменной при вычислении интегралов

10. Найдите ошибки в рассуждениях:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+tg^2 x) \cos^2 x}. \text{ Применяя подстановку } t = tg x, \text{ получаем}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+tg^2 x) \cos^2 x} = \int_0^{2\pi} \frac{d(tgx)}{2+tg^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{2+t^2} = 0.$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}. \text{ Применяя подстановку } x = \frac{1}{t}, \text{ имеем}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} &= - \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2(1+(1/t^2))} = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= -(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)) = -\frac{\pi}{2} < 0. \end{aligned}$$

$$в) \int_{-1}^1 \frac{d\left(1/\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)\right)}{dx} dx = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{3} < 0.$$

11. Можно ли вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ с помощью замены пере-

менной $x = \sin t$, взяв в качестве новых нижнего и верхнего пределов интегрирования числа t_1, t_2 : а) π и $\pi/2$; б) 2π и $5\pi/2$; в) π и $5\pi/2$? Вычислите интеграл в каждом случае, когда указанная замена допустима.

12. Применимы ли указанные подстановки в следующих интегралах (в каждом случае приведите обоснование, почему):

а) $\int_0^3 \sqrt[3]{1-x^2} dx$, $x = \sin t$ или $x = \cos t$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{12-5\cos x}$, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{12-5\cos x}$, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; г) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, $t = \operatorname{tg} x$;

д) $\int_0^7 (x^2-6x+13) dx$, $t = x^2-6x+13$?

13. В интеграле $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$ выполните замену переменной $t = \sin x$.

14. Найдите интеграл $I = \int_{-1}^3 \frac{f'(x) dx}{1+f^2(x)}$, если $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$.

15. Докажите, что для любой функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, справедливо

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

16. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)x) dx.$$

17. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, причём $f(a+b-x) = f(x)$ для любых $x \in [a, b]$. Докажите, что

$$\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

18. Докажите равенство

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx \quad (a > 0).$$

19. Докажите равенство:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx, \quad n, m \in R_+.$$

20. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на сегменте $[A, B] \supset [a, b]$. Найдите

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy \quad \text{при } A-a < x < B-b.$$

21. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx$; б) $\int_1^9 x \cdot \sqrt[3]{1-x} dx$; в) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

г) $\int_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1+3x^8} dx$.

22. Применяя подходящую замену переменной, вычислите интегралы:

а) $\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$; в) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \in N)$;

г) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt{x^2-10x+13}}$.

23. Вычислите интегралы:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

24. Вычислите интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi)$.

25. Найдите положительную дифференцируемую на $[0, +\infty)$ функцию $f(x)$, если известно, что при замене независимой переменной

$$\xi = \int_0^x f(t) dt$$

она переходит в функцию $e^{-\xi}$.

26. Докажите, что $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx > 0$.

27. Докажите, используя замену переменной интегрирования, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-a, a]$, симметричном относительно $x = 0$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

28. Вычислите интегралы:

а) $\int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ и б) $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$, полагая $t = x - \frac{1}{x}$.

29. Вычислите с помощью тригонометрических подстановок интегралы:

а) $\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$; б) $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$; в) $\int_{\frac{a}{2}}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ ($a > 0$).

Интегрирование по частям

30. Применяя формулу интегрирования по частям, найдите $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

31. Интегрируя по частям, вычислите интегралы:

а) $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$; б) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$.

32. Докажите неравенство $\frac{1}{5} \leq \int_0^1 \frac{xe^x dx}{\sqrt{25-x+x^2}} \leq \frac{2}{3\sqrt{11}}$.

33. Пусть $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ на сегменте $[0, 1]$. Докажите, что

$$\int_0^1 xf(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx.$$

34. Вычислите пределы последовательностей:

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(x^n) dx$; б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^\pi \cos(x^n) dx$; в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \cos(x^n) dx$.

Можно ли при вычислении данных пределов использовать 1-ю теорему о среднем?

35. Пусть f – непрерывно дифференцируемая на сегменте $[a, b]$ функция. Вычислите пределы последовательностей:

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$; б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(n^a x) dx$ ($a > 0$);
в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \frac{(2n^2+1)x}{2n} \cos \frac{x}{2n} dx$.

36. Выведите формулу понижения по параметру n , и с её помощью вычислите интеграл $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

37. Вычислите интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$ ($n, m \in \mathbb{N}$) с помощью

формулы понижения по одному из параметров.

38. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos((n+1)x) dx$; б) $\int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin((n+1)x) dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

39. Вычислите интеграл $\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \ln \cos x dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

Интегрирование периодических функций

40. Докажите, что если периодическая с периодом T функция f интегрируема на каждом конечном сегменте, то для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx.$$

41. Пусть непрерывная на всей числовой прямой функция f является периодической с периодом T . Докажите, что первообразная F функции f является периодической (с тем же периодом) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T f(t)dt = 0.$$

42. Докажите, что если $f(x)$ – непрерывная периодическая функция, определённая при $-\infty < x < +\infty$ и имеющая период $T \neq 0$, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

для любого действительного a .

43. Докажите, что если для непрерывной на $(-\infty, +\infty)$ функции $f(x)$ для любого x выполняется равенство $\int_x^{x+1} f(t)dt \equiv 0$, то $f(x)$ периодична. Найдите период этой функции.

44. Пусть непрерывная на всей числовой прямой функция f является периодической с периодом T . Докажите, что функция $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ является суммой периодической функции с периодом T и линейной функции $\frac{A}{T}x$, где $A = \int_0^T f(t)dt$.

45. Найдите интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

46. Докажите, что если $f \in C[0,1]$ функция, то верно соотношение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

Интегрирование функций, имеющих оси и центры симметрий

47. Докажите, используя геометрический смысл интеграла, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-a, a]$, симметричном относительно $x = 0$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

48. Докажите, что одна из первообразных чётной непрерывной функции есть функция нечётная, а всякая первообразная нечётной непрерывной функции есть функция чётная.

49. Вычислите определённые интегралы:

а) $\int_{-2}^2 (x^3 - 3x)dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x^{2007} - 2003x^{545} + 2000x) \lg^2 x dx$.

50. Докажите, что $\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx = 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

51. О непрерывной функции $f(x)$ известно, что она нечётная на сегменте $[-T/2, T/2]$ и имеет период, равный T . Докажите, что $\int_0^x f(t)dt$ есть также периодическая функция с тем же периодом.

Интегрирование взаимно обратных функций

52. Докажите, что если функция f дифференцируема и обратима на сегменте $[a, b]$, g – обратная для f функция, определённая на $f([a, b])$, то функция

$$F(x) = xf(x) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy$$

является первообразной для функции f на $[a, b]$.

Используя полученный результат, докажите справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy. \quad (1)$$

53. Вычислите интеграл $\int_0^1 \arctg x dx$ двумя способами: 1) используя формулу интегрирования по частям; 2) сведением к соответствующему определению

лённому интегралу от функции, являющейся обратной к подынтегральной (по формуле (1) из предыдущей задачи).

54. Следующие интегралы вычислите двумя способами:

1) используя результат задачи 52;

2) пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла:

$$\text{a) } \int_0^1 \arcsin x dx; \text{ б) } \int_e^{e^2} \ln x dx; \text{ в) } \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Интегрирование гиперболических функций

55. Вычислите интегралы:

$$\text{a) } \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{chx dx}{\sqrt{4-sh^2x}}; \text{ б) } \int_0^{\ln 2} th^2 x dx; \text{ в) } \int_0^{\ln 3} xchx dx.$$

56. Доказать формулы понижения степени

$$(chx + shx)^n = ch(nx) + sh(nx), (chx - shx)^n = ch(nx) - sh(nx)$$

($n \in \mathbb{N}$) (их следствиями будут формулы

$$ch(nx) = \frac{(chx + shx)^n + (chx - shx)^n}{2},$$

$$sh(nx) = \frac{(chx + shx)^n - (chx - shx)^n}{2},$$

и с их помощью вычислить интегралы:

$$\text{a) } \int_0^{0,1 \ln 2} (chx + shx)^{10} dx; \text{ б) } \int_0^{0,1 \ln 2} (chx - shx)^{10} dx.$$

57. Используя соотношения $sh^n x = \frac{(e^x - e^{-x})^n}{2^n}$ и $ch^n x = \frac{(e^x + e^{-x})^n}{2^n}$,

докажите формулы понижения степени

$$ch^3 x = \frac{1}{4} ch 3x + \frac{3}{4} ch x, sh^5 x = \frac{1}{16} sh 5x - \frac{5}{16} sh 3x + \frac{5}{8} sh x,$$

и с их помощью вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{1}{3} \ln 2} ch^3 x dx$; б) $\int_0^1 sh^5 x dx$.

58. Вычислите интегралы:

$$\text{a) } \int_0^1 x^2 chx dx; \text{ б) } \int_0^{\ln 2} sh^4 x dx; \text{ в) } \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{thx}{\sqrt{chx-1}} dx; \text{ г) } \int_0^a shx \sin x dx;$$

$$\text{д) } \int_0^{2 \ln 2} \frac{sh(x/2)}{ch^3(x/2)} dx; \text{ е) } \int_0^{3 \ln 2} sh^3(x/3) ch^2(x/3) dx.$$

Разные задачи

59. Докажите равенства:

$$\text{a) } \int_0^x \frac{t^6 dt}{t+1} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} = \ln(1+x), x \in (-1, +\infty).$$

$$\text{б) } -\int_0^x \frac{t^{14} dt}{t^2+1} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} = \arctg x.$$

$$\text{60. Вычислите интегралы: а) } \int_3^5 \frac{x+1}{(x-1)x(x-2)} dx; \text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}.$$

$$\text{61. Вычислите интегралы: а) } \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} dx; \text{ б) } \int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}};$$

$$\text{в) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}; \text{ г) } \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx; \text{ д) } \int_0^1 (\arcsin x)^4 dx.$$

$$\text{62. Решите уравнение: а) } \int_{\sqrt{2}t}^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}; \text{ б) } \int_{\ln 2}^x \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}.$$

§ 4.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Выше в §1 было рассмотрено понятие определённого интеграла Римана, или собственного интеграла. При этом предполагалось, что промежуток интегрирования конечен, а подынтегральная функция является ограниченной. Данный параграф посвящён обобщению этого понятия на те случаи, когда либо промежуток интегрирования бесконечен, либо подынтегральная функция является неограниченной.

4.1. Понятия несобственных интегралов 1-го и 2-го рода и связь между ними.

Сходимость (расходимость) интеграла

4.1.1. Несобственный интеграл 1-го рода

Начнём с рассмотрения интеграла по бесконечному промежутку. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле в любой конечной его части $[a, A]$ ($\forall A > a$).

Предел интеграла $\int_a^A f(x)dx$ (конечный или бесконечный) при $A \rightarrow +\infty$

называют *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx. \quad (1)$$

В случае, когда этот предел конечен, говорят, что интеграл (1) *сходится*, а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой в бесконечном промежутке* $[a, +\infty)$ (в несобственном смысле). Если же предел (1) бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он *расходится* (соответственно, функция $f(x)$ – *неинтегрируема*). В частности, если этот предел равен

$+\infty$, то говорят, что интеграл *расходится к $+\infty$* . Бесконечно удалённая точка $x = +\infty$ (правый конец промежутка интегрирования) называется в этом случае *особой точкой* (особенностью 1-го рода).

По определению будем считать, что если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\int_{+\infty}^a f(x)dx = - \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Аналогично определяется и интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $(-\infty, a]$ (если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[A', a]$ для любого $A' < a$):

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^a f(x)dx \quad (A' < a), \quad (2)$$

Интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \int_{A'}^A f(x)dx \quad (3)$$

при независимом стремлении $A \rightarrow +\infty$ и $A' \rightarrow -\infty$. В этом случае при любом a имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^a f(x)dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx,$$

причём интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится в том и только в том случае, когда сходится каждый из интегралов в правой части.

Замечание. Для обозначения факта сходимости несобственного интеграла (1) от неотрицательной функции $f(x)$ в некоторых пособиях используют условный символ

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$$

(так же как и для обозначения сходимости интеграла от неположительной функции – символ $\int_a^{+\infty} f(x)dx > -\infty$).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пользуясь определением, выяснить, сходится ли несобственный интеграл (если сходится, то найти его значение):

$$\text{а) } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (a > 0); \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \text{ в) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}; \text{ г) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \text{ д) } \int_0^{+\infty} \cos x dx.$$

Решение. а) Функция $\frac{1}{x^p}$ интегрируема по Риману в любом конечном сегменте $[a, A]$ ($A > a$).

При $p \neq 1$ находим

$$\int_a^A \frac{dx}{x^p} = \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_a^A = \frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Перейдём к пределу:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

При $p > 1$ имеем $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{1-p}}{1-p} = 0$, а значит, интеграл сходится (к своему значению $\frac{a^{1-p}}{p-1}$). При $p < 1$ имеем $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{1-p}}{1-p} = +\infty$, а значит, интеграл расходится.

При $p = 1$ имеем $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^{+\infty} = +\infty$, т.е. интеграл расходится.

Итак, при $p > 1$ интеграл сходится к числу $\frac{a^{1-p}}{p-1}$, а при $p \leq 1$ – расходится (к $+\infty$).

б) Функция $\frac{1}{1+x^2}$ интегрируема по Риману в любом конечном сегменте $[0, A]$ ($A > 0$), причём $\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^A = \arctg A$. Так как для этого интеграла при $A \rightarrow +\infty$ существует конечный предел, равный $\pi/2$, то ин-

теграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится (и равен $\pi/2$).

в) Аналогично получаем:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_{-A}^0 = \lim_{A \rightarrow -\infty} (-\arctg A) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{г) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

$$\text{д) } \int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A. \text{ Поскольку}$$

этот предел не существует, то данный интеграл расходится.

4.1.2. Несобственный интеграл 2-го рода

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, определённую в конечном промежутке $[a, b]$ (за исключением, быть может, концов этого сегмента), но неограниченную на нём. Предположим, ради определённости, что на любом сегменте вида $[a, b-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b-a$) функция ограничена и собственно интегрируема, но является неограниченной в левой окрестности точки b . Точка b в этом случае, вне зависимости от того, определена функция в этой точке или нет, носит название *особой точки* (2-го рода).

Предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ (конечный или бесконечный) при $\varepsilon \rightarrow +0$

называют *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $f(x)$ от a до b и обозначают символом

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (1)$$

В случае, когда этот предел конечен, говорят, что интеграл (1) *сходится*, а неограниченную функцию $f(x)$ называют *интегрируемой в пределах* от a до b (в несобственном смысле). Если же предел (1) бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он *расходится*, а функция $f(x)$ – *неинтегрируема* на данном промежутке. В частности, если этот предел равен $+\infty$, то говорят, что интеграл *расходится к $+\infty$* .

Аналогично $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ в случае, если a – особая точка.

Так же, как и в случае с собственным интегралом, по определению будем считать, что если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$, то

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

В общем случае на промежутке $[a, b]$ может быть конечное число особых точек $c_1, c_2, \dots, c_m$, вблизи которых функция $f(x)$ неограничена, в то время как на любом сегменте, принадлежащем $[a, b]$ и не содержащем особых точек, функция ограничена и интегрируема. Пусть, например, таких особых точек три, причём две из них совпадают с концами a, b промежутка, а третья, c , лежит между ними. Тогда интеграл от $f(x)$ в пределах от a до b определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_3 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_4 \rightarrow +0}} \left(\int_{a+\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_2} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} f(x)dx \right)$$

при одновременном, но независимом стремлении к нулю положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

Для несобственных интегралов на бесконечном промежутке особых точек может быть бесконечно много, лишь бы в каждом конечном промежутке $[a, A]$ их было бы конечное число.

При исследовании несобственных интегралов на сходимость (как и при вычислении их по определению) выясняют сходимость интеграла в окрестности каждой из особых точек (если особая точка 2-го рода, то отдельно в левой и правой её окрестностях). Интеграл считается сходящимся, только если он сходится в каждой окрестности каждой своей особой точки. В противном случае интеграл считают расходящимся.

Замечание. С помощью подстановки $t = \frac{1}{b-x}$ рассмотренный выше не-

собственный интеграл 2-го рода с особенностью в точке b приводится к несобственному интегралу 1-го рода (при этом особенность 2-го рода преобразуется в результате указанной подстановки в особенность 1-го рода).

Пусть, например, дан несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ ($a < b$), где подынтегральная функция неограничена в левой окрестности точки b . Сделав подстановку $t = \frac{1}{b-x}$, получим $x = b - \frac{1}{t}$, $dx = \frac{dt}{t^2}$ и, следовательно,

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \int_{1/(b-a)}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-p}}.$$

Пример 1. Пользуясь определением, исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \quad (a < b); \text{ б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ в) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ г) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. а) Функция $\frac{1}{(b-x)^p}$ ограничена и интегрируема в любом промежутке $[a, b-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b-a$) и, если $p > 0$, при $x \rightarrow b-0$ её значение неограниченно возрастает (точка $x = b$ является особой). При $p \neq 1$ по определению находим

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\varepsilon^{1-p}}{p-1} - \frac{(b-a)^{1-p}}{p-1} \right). \end{aligned}$$

Если $p < 1$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon^{1-p}}{p-1} = 0$, и, следовательно, интеграл сходится (к своему значению $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$). Если $p > 1$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon^{1-p}}{p-1} = +\infty$, а значит, интеграл расходится (к $+\infty$).

При $p = 1$ имеем $\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = +\infty$

– расходится.

Итак, при $p < 1$ интеграл сходится, а при $p \geq 1$ – расходится.

б) Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ограничена и интегрируема на любом сегменте $[0, 1-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 1$, и в точке $x=1$ (единственная особая точка на промежутке интегрирования) значение функции обращается в бесконечность. По определению,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

в) Особая точка $x = -1$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon}^0 = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(-1+\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

г) Имеем две особые точки $x = \pm 1$:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4.2. Понятие среднего значения функции на неограниченном промежутке.

Сходимость интеграла в смысле главного значения (по Коши)

4.2.1. Среднее значение функции, интегрируемой на неограниченном промежутке

Пусть функция $f(x)$ определена на $(0, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом конечном промежутке вида $(0, x)$, принадлежащем области определения.

Средним значением функции $f(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$ называется число

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Пример. Найти среднее значение функции $f(x) = \arctg x$ на $(0, +\infty)$.

Решение. Вычислим данный интеграл интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} M[\arctg x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \arctg(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(t \cdot \arctgt \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t dt}{1+t^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctg x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} \right) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

так как, по правилу Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = 0$.

Замечание. Ранее (в задаче 4 § 2) было доказано, что если $f(x) \in C[0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A$.

4.2.2. Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения (по Коши)

1. Случай несобственных интегралов 1-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном сегменте $[A', A'']$, причём внутри промежутка $(-\infty, +\infty)$ нет особых точек. Как было показано выше, под интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ понимается, по определению, предел

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \int_{A'}^A f(x) dx \quad (1)$$

при независимом стремлении $A \rightarrow +\infty$ и $A' \rightarrow -\infty$. Может оказаться, что в этом смысле предела нет, но существует предел, отвечающий частному пред-

положению $A'' = -A'$. Его называют *главным значением интеграла* (1) (в смысле Коши) и обозначают символом⁴

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

Замечание 1. Если, в частности, функция $f(x)$ *нечётная*, то её интеграл в симметричном относительно нуля сегменте $[-A, A]$ будет равен нулю, и поэтому

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0,$$

хотя несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ может и вовсе не существовать (например, для функции $f(x) = x$).

Если же функция $f(x)$ *чётная*, то $\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx$. Предел для этого интеграла существует в том и только в том случае, когда существует предел для интеграла $\int_0^A f(x) dx$, т.е. существует несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, а с ним и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Таким образом, для чётной функции главное значение интеграла существует лишь одновременно с несобственным интегралом (и, естественно, равно ему):

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

Известно, что любую функцию $f(x)$, интегрируемую в каждом конечном промежутке, можно представить в виде суммы двух функций:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ и } \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

первая из которых является чётной, а вторая – нечётной (сохраняющих то же свойство интегрируемости). Поэтому справедливо равенство

⁴ V.p. – начальные буквы от слов ‘valeur principale’, означающих по-французски «главное значение».

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx,$$

если последний несобственный интеграл существует.

Это свойство можно использовать для упрощения вычисления главных значений несобственных интегралов. Например, раскладывая функцию $\frac{1+x}{1+x^2}$ на чётную $\frac{1}{1+x^2}$ и нечётную $\frac{x}{1+x^2}$ составляющие, сразу получим, что

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

2. Случай несобственных интегралов 2-го рода. Пусть в конечном промежутке $[a, b]$ задана функция $f(x)$, которая имеет лишь одну особую точку c внутри промежутка и интегрируема в собственном смысле в каждой его части, не содержащей c . Несобственный интеграл 2-го рода для функции $f(x)$ в пределах от a до b определяется, как известно, равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \right),$$

причём предел должен существовать при *независимом* стремлении положительных чисел ε_1 и ε_2 к нулю. В некоторых случаях, когда этот предел не существует, может существовать предел того же выражения, в котором ε_1 и ε_2 стремятся к нулю, оставаясь равными. Если этот предел существует, его называют (по примеру Коши) *главным значением* несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ и обозначают символом

$$V.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Замечание 2. Если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует как несобственный, то

он существует и в смысле главного значения. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Нетрудно распространить понятие главного значения и на случай любого конечного числа особых точек внутри рассматриваемого промежутка. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти главные значения интегралов:

$$\text{а) } \int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b); \text{ б) } \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x}; \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx; \text{ г) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Решение. а) Интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b)$ как несобственный не существует, так как выражение

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

не имеет определённого предела, если ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга. В то же время, если положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то получим выражение

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a},$$

не зависящее от ε . Это говорит о том, что главное значение данного интеграла существует и равно

$$V.p. \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

б) По определению,

$$\begin{aligned} V.p. \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{d(\ln x)}{\ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln |\ln x| \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} + \ln (\ln x) \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln |\ln(1-\varepsilon)| - \ln \left| \ln \frac{1}{2} \right| + \ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon)) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right|. \end{aligned}$$

Так как при $\varepsilon \rightarrow +0 \quad \ln(1-\varepsilon) \sim -\varepsilon$, $\ln(1+\varepsilon) \sim \varepsilon$, то данный предел равен

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} \right| = 0.$$

в) Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ как несобственный расходится, однако главное значение у него существует. В самом деле,

$$\begin{aligned} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\cos x \Big|_{-A}^A \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-\cos A + \cos(-A)) = 0. \end{aligned}$$

г) Так как $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$, то на промежутке интегри-

рования имеем три особые точки: $x=1$, $x=2$ (в окрестностях этих точек интеграл расходится) и $x=+\infty$. Однако главное значение этого интеграла существует. Действительно, по определению,

$$\begin{aligned} V.p. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} &= \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{2+\varepsilon_2}^A \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_0^{1-\varepsilon_1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{1+\varepsilon_1}^{2-\varepsilon_2} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_{2+\varepsilon_2}^A \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left(\ln \left| \frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right| - \ln 2 + \ln \left| \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \right| - \ln \left| \frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right| + \ln \left| \frac{A-2}{A-1} \right| - \ln \left| \frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2} \right| \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left(-\ln 2 + \ln \left| \frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \right| + \ln \left| \frac{A-2}{A-1} \right| \right) = -\ln 2. \end{aligned}$$

4.2.3. Среднее значение несобственного интеграла

Выше мы рассмотрели способ определения среднего значения функции, интегрируемой по бесконечному промежутку. Покажем, что понятие среднего значения можно ввести и для несобственного интеграла.

Пусть, например, функция $f(x)$ определена при $x \geq 0$ и интегрируема в собственном смысле в каждом конечном сегменте $[0, x]$, но не интегрируема на всём промежутке $[0, +\infty)$. Определим функцию

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

и составим её среднее значение

$$\frac{1}{x} \int_0^x F(u) du.$$

Если для него существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du = I,$$

то это число и рассматривают как *обобщённое*, или *среднее*, *значение интеграла* (при этом сам интеграл расходится!).

Например, рассмотрим расходящийся интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ и найдём его

среднее значение согласно введённому определению. Здесь $f(x) = \sin x$,

$F(x) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x$, и для «обобщённого значения» получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(u) du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1.$$

Заметим, что если несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то его среднее значение, найденное по той же схеме, совпадает со значением этого интеграла.

4.3. Критерий Коши сходимости (расходимости) несобственного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом сегменте $[a, A]$ ($\forall A > a$).

Теорема 1.1 (критерий Коши сходимости интегралов 1-го рода). Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε нашлось такое отвечающее ему число $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$, что при любых $A', A'' \geq A_0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_a^{A'} f(x) dx - \int_a^{A''} f(x) dx \right| = \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F(A) = \int_a^A f(x) dx$. Тогда, по критерию Коши

существования предела функции в точке, функция $F(A)$ имеет предел в точке $+\infty$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$ такое, что для любых $A', A'' \geq A_0$ выполнено: $|F(A') - F(A'')| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Как следствие, получаем следующую теорему.

Теорема 1.2 (критерий Коши расходимости интегралов 1-го рода). Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$

такое, что для любого (сколь угодно большого) числа $A_0 > a$ найдутся такие два числа $A', A'' \geq A_0$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_a^{A'} f(x) dx - \int_a^{A''} f(x) dx \right| = \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| > \varepsilon.$$

Теорема 2.1 (критерий Коши сходимости интегралов 2-го рода). Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ (b – особая точка) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое отве-

чающее ему число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любых η', η'' таких, что $0 < \eta' < \delta$ и $0 < \eta'' < \delta$, выполнялось неравенство

$$\left| \int_{b-\eta'}^{b-\eta''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F(\eta) = \int_a^\eta f(x) dx$. Тогда, по критерию Коши существования предела функции в точке, функция $F(\eta)$ имеет предел в точке b слева тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых η', η'' , удовлетворяющих $0 < \eta' < \delta$ и $0 < \eta'' < \delta$, выполнялось:

$$|F(b - \eta') - F(b - \eta'')| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Из данной теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2 (критерий Коши расходимости интегралов 2-го рода). Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ (b – особая точка) расходится тогда и только тогда, когда найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для любого (сколь угодно малого) $\delta > 0$ найдутся числа η', η'' , удовлетворяющие неравенствам $0 < \eta' < \delta$, $0 < \eta'' < \delta$ и такие, что выполняется неравенство

$$\left| \int_{b-\eta'}^{b-\eta''} f(x) dx \right| > \varepsilon.$$

Пример. Используя критерий Коши расходимости несобственных интегралов, доказать расходимость интегралов

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ и } \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (a > 0, p \leq 0).$$

Доказательство. Согласно критерию Коши, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится тогда и только тогда, когда $\exists \varepsilon > 0 : \forall A \geq a \exists A', A'' > A :$

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| > \varepsilon.$$

В рассматриваемом случае интеграл расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall A \geq a$

$\exists A', A'' > A : \left| \int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x^p} dx \right| > \varepsilon$. Покажем, что это так. Действительно, так как $\forall A \geq a \exists n \in \mathbb{N} : 2\pi n > A$, то возьмём в качестве A' и A'' числа $2\pi n$ и $\pi + 2\pi n$ соответственно и рассмотрим интеграл

$$I = \left| \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} x^{-p} \sin x dx \right|.$$

Функция x^{-p} непрерывна на сегменте $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, а функция $\sin x$ непрерывна и не меняет своего знака на этом сегменте, поэтому по 1-й теореме о среднем имеем:

$$I = \xi^{-p} \left| \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin x dx \right| = 2 \cdot \xi^{-p}, \text{ где } 2\pi n < \xi < \pi + 2\pi n.$$

При достаточно больших n имеем: $-p \geq 0$, $\xi > 1$, поэтому $\xi^{-p} > 1$, и, значит, $I > 2$. Но тогда для любого положительного $\varepsilon \leq 2$ выполнен критерий Коши расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$. Таким образом, расходимость интеграла доказана.

Расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ доказывается аналогично.

4.4. Свойства несобственного интеграла

Так как несобственные интегралы суть пределы собственных, то их свойства во многом аналогичны свойствам собственных интегралов. Доказательства этих свойств основаны на соответствующих свойствах интегралов Римана, а также свойствах пределов функций.

Обозначим промежуток интегрирования $[a, b]$, где a и b могут принимать как конечные, так и бесконечные значения.

1. Линейность интеграла.

1.1. Если функция $f(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) на промежутке $[a, b]$ и $c = \text{const}$, то и функция $cf(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

1.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, b]$, то функция $f(x) \pm g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Следствие. Линейная комбинация $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x)$ конечного числа интегрируемых на $[a, b]$ функций $f_k(x)$ с коэффициентами α_k , $k = 1, 2, \dots, n$, является интегрируемой на $[a, b]$ функцией, причём

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f_k(x) dx.$$

Доказательство вытекает непосредственно из свойства линейности собственных интегралов и пределов функций (см. раздел 1.4 параграфа 1).

Замечание 1. Сумма (разность) интегрируемой и неинтегрируемой функций есть функция неинтегрируемая.

Действительно, пусть функция $f(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) на промежутке $[a, b]$, а функция $g(x)$ – нет. Предположим, что их сумма (разность) является интегрируемой (в несобственном смысле) на $[a, b]$ функцией. Но тогда и функция $g(x)$ должна быть интегрируема на $[a, b]$ как разность (сумма) двух интегрируемых функций, что противоречит нашему предположению.

Замечание 2. Сумма двух неинтегрируемых функций может оказаться интегрируемой функцией. Например, рассмотрим на $[1, +\infty)$ функции

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ и } g(x) = -\frac{1}{x}.$$

Очевидно, каждая из них неинтегрируема на данном промежутке. Тем не менее, их сумма $f(x) + g(x) \equiv 0$ и, следовательно, интегрируема на $[1, +\infty)$.

2. Аддитивность интеграла.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) в наибольшем⁵ из промежутков $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$ (a, b, c могут принимать и бесконечные значения). Тогда она интегрируема в двух других, причём имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В частности, если $f(x)$ интегрируема на $[a, +\infty)$ и $c > a$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Если $f(x)$ интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, то при любом c имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c]$ и неинтегрируема на $[c, +\infty)$, то она неинтегрируема на объединении этих промежутков, т.е. на $[a, +\infty)$.

Доказательство. Свойство аддитивности несобственного интеграла следует из аддитивности собственного интеграла (см. раздел 1.4 параграфа 1).

Например, пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, +\infty)$ и $c > a$. Тогда $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на сегменте $[a, A]$ для любого $A > a$.

Значит, $\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx$. Переходя к пределу при

$$A \rightarrow +\infty, \text{ получим, что } \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Если же $f(x)$ неинтегрируема на $[c, +\infty)$, то это означает, что не существует предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_c^A f(x)dx$. Но тогда не существует и предел

⁵ Том из промежутков, который содержит в себе оба других.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_c^A f(x) dx.$$

Значит, функция $f(x)$ неинтегрируема на промежутке $[a, +\infty)$.

3. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то сходится также и любой интеграл вида $\int_A^{+\infty} f(x) dx$, где $A > a$, и наоборот, если на промежутке $[a, +\infty)$ нет других особых точек, кроме $x = +\infty$, и $A > a$, то из сходимости интеграла $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, при этом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx.$$

Доказательство вытекает непосредственно из определения несобственного интеграла 1-го рода.

4. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(x) dx = 0$.

Доказательство. Из предыдущего свойства сразу следует, что

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

5. Интегрируемость произведения.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ уже, вообще говоря, не обязательно интегрируемо на $[a, b]$.

Например, рассмотрим функции $f(x) = g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ на промежутке

$[1, +\infty)$. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится (по признаку Дирихле, п. 4.7.5.), од-

нако интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x}$ расходится (как разность расходящегося и сходящегося интегралов).

Замечание 3. Обращаем внимание на отличие этого свойства от аналогичного свойства собственных интегралов (там было: если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируемо на $[a, b]$). Однако при некоторых дополнительных ограничениях на функции $f(x)$ и $g(x)$ интеграл от их произведения будет сходиться (см., например, признаки Дирихле, Абеля, Коши).

Замечание 4. Из интегрируемости (в несобственном смысле) на промежутке $[a, b]$ произведения двух функций отнюдь не следует интегрируемости на $[a, b]$ каждой из них в отдельности.

Например, рассмотрим на $[1, +\infty)$ функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) \equiv 1$. Их произведение $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x^2}$ интегрируемо на указанном промежутке, а отдельно функция $g(x)$ – нет.

В общем случае, если одна из функций интегрируема на некотором бесконечном промежутке, а другая – нет, то их произведение может быть как интегрируемым, так и неинтегрируемым на этом промежутке.

6. Связь интегрируемости с абсолютной интегрируемостью⁶.

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f(x)|$, вообще говоря, не обязательно интегрируема на $[a, b]$.

Например, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ – расходится.

Наоборот, в рассматриваемом случае несобственных интегралов из интегрируемости функции $|f(x)|$ на $[a, b]$ следует интегрируемость на этом промежутке функции $f(x)$. При этом справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

⁶ Функция называется абсолютно интегрируемой, если сходится интеграл от её модуля (см. п. 4.7.9).

Доказательство: см. теорему 1 п. 4.7.9.

Замечание 5. Обращаем внимание на отличие этого свойства от аналогичного свойства интегралов Римана (там было: если функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на сегменте $[a, b]$, то и функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$).

7. Если $f(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) на промежутке $[a, b]$, то она интегрируема на любом промежутке $[c, d] \subseteq [a, b]$.

Доказательство. Пусть b – особая точка несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (и других особых точек на промежутке $[a, b]$ нет). Если $d < b$, то функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на промежутке $[c, d]$ (по определению несобственного интеграла). Если $d = b$ и $[c, d] \subseteq [a, b]$, то очевидно, что $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле на $[c, d]$.

8. Интеграл по симметричному отрезку.

Если $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на $[0, +\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^{+\infty} f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[0, A]$ для любого $A > 0$, то для неё справедливы соотношения (см. пункт 3.5.2 параграфа 3):

$$\int_{-A}^A f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^A f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

Отсюда предельным переходом получаем наше утверждение.

9. Независимость интеграла от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

10. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и имеет период $T > 0$, а функция $g(x)$ монотонна в том же промежутке и стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$. Если интеграл (собственный) $\int_a^{a+T} f(x)dx = 0$, то интеграл (несобственный) $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. Если же, наоборот,

$\int_a^{a+T} f(x)dx = K \neq 0$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится или расходится

в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство: см. [17] (гл. XIII, §1, п. 478).

Например, рассмотрим функцию $f(x) = \sin^2 x$, периодическую с периодом $T = \pi$, на промежутке $[0, +\infty)$. Интеграл $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \neq 0$.

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \sin^2 x \cdot g(x)dx$, где $g(x)$ монотонна на $[0, +\infty)$ и стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$, сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. С другой стороны, интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 x \right) \cdot g(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos 2x \cdot g(x)dx$$

сходится для любой функции $g(x)$, монотонно на $[0, +\infty)$ стремящейся к 0 при $x \rightarrow +\infty$.

11. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, +\infty)$, то она, вообще говоря, не обязательно ограничена на этом промежутке.

Например, функция $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$ интегрируема (в несобственном смысле) на бесконечном промежутке $[0, +\infty)$ (пример 1 из п. 4.7.4), однако, очевидно,

эта функция не является ограниченной на нём.

Замечание 6. Обращаем внимание на отличие этого свойства от аналогичного свойства интегралов Римана (там было: если функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте).

12. Если для двух интегрируемых на промежутке $[a, b]$ ($a < b$) функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство вытекает из соответствующего свойства собственных интегралов (см. свойство 2 раздела 2.1 §2) и из теоремы о переходе к пределу в неравенствах.

13. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то при любом x из промежутка (a, b) существует интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

и представляет собой непрерывную функцию от x .

Доказательство. Так как для любого x из промежутка (a, b) найдётся число $A \in (a, b)$ такое, что точка x лежит на сегменте $[a, A]$, и на этом сегменте функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле, то данное утверждение вытекает из теоремы 1 раздела 1.5 §1.

14. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и в точке $x = x_0$ из промежутка (a, b) функция $f(x)$ непрерывна, то существует производная

для функции $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ в этой точке, причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство следует из теоремы 2 пункта 1.5 §1.

4.5. Теоремы о среднем

Рассмотрим обобщённую формулировку теорем о среднем, где одна из функций в произведении под знаком интеграла на рассматриваемом промежутке может быть интегрируема лишь в несобственном смысле.

Теорема 1 (первая теорема о среднем значении). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы в конечном промежутке $[a, b]$ ($g(x)$, возможно, в несобственном смысле), причём $f(x)$ на нём ограничена:

$$m \leq f(x) \leq M,$$

а $g(x)$ не меняет знака. Тогда функция $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Если к тому же функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то за m, M можно взять наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, и множитель μ оказывается равным одному из значений функции $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx, \text{ где } c \in [a, b].$$

Замечание. Аналогичная теорема верна и в случае, когда промежутки $[a, b]$ бесконечны.

Доказательство. Пусть $g(x)$ интегрируема в несобственном смысле на $[a, b]$. Заметим, что в условиях теоремы выполняется неравенство $|f(x)g(x)| \leq \max\{|m|, |M|\} |g(x)|$ и, следовательно, функция $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в несобственном смысле (см. теорему 2.1 пункта 4.7.1 ниже). Будем теперь для определённости считать, что точка b является для

интеграла $\int_a^b g(x)dx$ особой, и что других особых точек на промежутке $[a, b]$

нет. Тогда $g(x)$ интегрируема в собственном смысле на сегменте $[a, A]$ для любого $A \in (a, b)$ и сохраняет знак на этом сегменте. Значит, согласно первой теореме о среднем для собственных интегралов (см. теорему 1 пункта 2.2.1 §2), выполнено:

$$\int_a^A f(x)g(x)dx = \mu(A) \int_a^A g(x)dx \text{ для любого } A \in (a, b),$$

$$\text{где } \mu(A) \in \left[\inf_{a \leq x \leq A} f(x), \sup_{a \leq x \leq A} f(x) \right].$$

Переходя к пределу при $A \rightarrow b-0$ в последнем соотношении (имеем право сделать это в силу определения несобственного интеграла), получим утверждение теоремы.

Теорема 2 (вторая теорема о среднем значении). Пусть функция $f(x)$ монотонна и ограничена в промежутке $[a, b]$, а функция $g(x)$ интегрируема в этом промежутке (возможно, в несобственном смысле). Тогда функция $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0) \int_a^\xi g(x)dx + f(b-0) \int_\xi^b g(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

Замечание. Аналогичная теорема верна и в случае, когда промежуток $[a, b]$ бесконечен.

Доказательство. Так же, как и в теореме 1, можно показать, что функция $f(x)g(x)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, b]$.

Пусть снова точка b является для интеграла $\int_a^b g(x)dx$ особой, и будем считать, что других особых точек на промежутке $[a, b]$ нет. Тогда в силу второй теоремы о среднем для собственных интегралов (теорема 2 пункта 2.2.2 §2 и замечание к ней), имеем: для любого числа $A \in (a, b)$ существует такая

точка $\xi \in [a, A]$, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0) \int_a^\xi g(x)dx + f(A) \int_\xi^A g(x)dx$.

Переходя к пределу при $A \rightarrow b-0$ в последнем равенстве, получим необходимое утверждение. Теорема доказана.

4.6. Вычисление несобственных интегралов

4.6.1. Формула Ньютона–Лейбница

Теорема (основная теорема интегрального исчисления, для несобственных интегралов 1-го рода). Пусть функция $f(x)$ определена в бесконечном

промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом конечном сегменте $[a, A]$ ($A > a$). Если для $f(x)$ при этом существует первообразная функция $F(x)$ на всём промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^a = F(a) - F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Эти формулы носят название *формул Ньютона–Лейбница*.

Доказательство. Применим формулу Ньютона–Лейбница для собственных интегралов:

$$\int_a^A f(x)dx = F(x) \Big|_a^A = F(A) - F(a) \text{ для любого } A > a.$$

После этого перейдём в последнем равенстве к пределу при $A \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = F(+\infty).$$

Пример 1. Вычислить несобственные интегралы:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx; \text{ б) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Решение. а) Очевидно, функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной функцией для функции $\sin x$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$, поэтому, по формуле Ньютона–Лейбница, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Поскольку двойная подстановка не имеет смысла, так как не существуют пределы $\cos x$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то данный интеграл расходится.

$$\text{б) } \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = - \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

4.6.2. Формула замены переменной

Теорема 1 (замена переменной в несобственных интегралах 1-го и 2-го рода). Пусть выполняются следующие условия:

- 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в конечном или бесконечном промежутке $[a, b)$ (b – единственная особая точка 1-го или 2-го рода);
- 2) функция $x = x(t)$ определена, непрерывно дифференцируема и возрастает на промежутке $[\alpha, \beta)$ (или, соответственно, убывает на промежутке $(\beta, \alpha]$), где β может принимать, в том числе, бесконечное значение;
- 3) множеством значений функции $x(t)$ является промежуток $[a, b)$;
- 4) $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) \cdot x'(t) dt, \quad (1)$$

в предположении, что существует один из этих интегралов (существование другого отсюда уже вытекает).

Замечание 1. Второй интеграл будет либо собственным, либо несобственным – с единственной особой точкой β .

Доказательство. По теореме об обратной функции получаем, что у функции $x = x(t)$ существует обратная функция $t = t(x)$, непрерывная (и имеющая ту же монотонность, что и $x(t)$) на $[a, b)$. Пусть теперь x_0 и t_0 – произвольные, но соответствующие одно другому значения x и t из промежутков (a, b) и (α, β) . Тогда, применяя к этим промежуткам теорему о замене переменной в определённом интеграле Римана, получим:

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = \int_{\alpha}^{t_0} f(x(t)) \cdot x'(t) dt.$$

Если существует, скажем, интеграл в правой части (1), то станем приближать произвольным образом x_0 к b . При этом $t_0 = t(x_0)$ устремится к β ,

что доказывает существование интеграла в левой части (1) и, одновременно, справедливость равенства (1). Теорема доказана.

Замечание 2. Аналогично формулируется и доказывается теорема для промежутка вида $(-b, a]$.

Пример 1. Вычислить несобственные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}; \text{ б) } \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Решение. а) Сделаем замену $t = \sqrt{1-x^2}$, тогда $x^2 = 1-t^2$, $x dx = -t dt$ и получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} &= - \int_1^0 \frac{t dt}{\sqrt{1-t}} = \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t}} = \int_0^1 \frac{1+(t-1)dt}{\sqrt{1-t}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} - \int_0^1 \sqrt{1-t} dt = - \int_0^1 \frac{d(1-t)}{\sqrt{1-t}} + \int_0^1 \sqrt{1-t} d(1-t) = \\ &= \left(-2\sqrt{1-t} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-t)^3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

б) Положим $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}} 2t dt = 2 \int_0^1 \arcsin t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= 2 \int_0^1 \arcsin t d(\arcsin t) = (\arcsin t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

4.6.3. Формула интегрирования по частям

Теорема 2.1 (интегрирование по частям несобственного интеграла 1-го рода). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, +\infty)$, и пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x))$.

Тогда из сходимости одного из интегралов

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx \text{ или } \int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx$$

следует сходимость второго интеграла, причём справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Доказательство. Из формулы интегрирования по частям в определённом интеграле Римана следует, что для любого действительного числа $A > a$:

$$\int_a^A f(x)g'(x)dx = f(A)g(A) - f(a)g(a) - \int_a^A f'(x)g(x)dx.$$

Если существует предел при $A \rightarrow +\infty$ одной из частей последнего равенства, то существует предел и второй, и они равны. Теорема доказана.

Сформулируем аналогичную теорему для интегралов 2-го рода.

Теорема 2.2 (интегрирование по частям несобственного интеграла 2-го рода). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на сегменте $[a, b - \varepsilon]$ (или на сегменте $[a + \varepsilon, b]$) для любого $\varepsilon > 0$, и пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b-0} (f(x)g(x))$ (или $\lim_{x \rightarrow a+0} (f(x)g(x))$). Тогда из сходимости одного из интегралов

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \text{ или } \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

следует сходимость второго и справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Доказательство вытекает из формулы интегрирования по частям в определённом интеграле Римана с помощью предельного перехода.

Пример 1. Вычислить при помощи интегрирования по частям

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx \quad (a > 0, b \neq 0).$$

Решение. Обозначим данный интеграл буквой I . Положим $f = e^{-ax}$, $dg = \cos bxdx$, тогда $df = -ae^{-ax}dx$, $g = \frac{1}{b} \sin bx$. Интегрируя по частям, получаем

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \frac{1}{b} \sin bx \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{b} \sin bx \cdot (-ae^{-ax})dx.$$

Так как $\frac{1}{b} \sin bx \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = 0$, то $I = \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} \sin bx \cdot e^{-ax} dx$. Ещё раз проинтегрируем по частям, положив $f = e^{-ax}$, $dg = \sin bxdx$. Тогда $df = -ae^{-ax}dx$, $g = -\frac{1}{b} \cos bx$ и находим

$$I = \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} \sin bx \cdot e^{-ax} dx = \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} \cos bx \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{b} \cos bx \right) (-ae^{-ax}) dx \right).$$

Так как $-\frac{1}{b} \cos bx \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{b}$, то получаем

$$I = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} \cos bx \cdot e^{-ax} dx \right) = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b} I \right).$$

Осталось выразить из этого соотношения I : $I = \frac{a}{a^2 + b^2}$.

Покажем на следующем примере, что несобственный интеграл может возникнуть при интегрировании по частям собственного интеграла.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Решение. Так как функция $\arcsin x$ непрерывна на промежутке интегрирования, то данный интеграл является собственным. Вычислим его интегрированием по частям:

$$\int_0^1 \arcsin x dx = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Заметим, что полученный в результате интеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ является сходящимся несобственным интегралом 2-го рода, найдём его:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1.$$

$$\text{Итак, } \int_0^1 \arcsin x dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

В следующем примере интегрирование по частям позволяет получить формулу понижения величины параметра и, в конечном итоге, вычислить несобственные интегралы.

Пример 3. Выведа формулы понижения, вычислить несобственный интеграл в зависимости от значений n ($n \in \mathbb{N}$):

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

Решение. Положим $f = x^n$, $dg = e^{-x} dx$, тогда $df = nx^{n-1} dx$, $g = -e^{-x}$, и, интегрируя по частям, находим рекуррентную формулу понижения степени:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n),$$

где $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$. Отсюда получаем

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

4.7. Исследование сходимости несобственных интегралов

Во многих задачах, связанных с несобственными интегралами, интерес представляет не значение сходящегося интеграла, а установление самого факта его сходимости (либо расходимости). Исследование сходимости возможно проводить различными способами. Выше уже были рассмотрены следующие подходы к исследованию несобственных интегралов на сходимость.

1. *Непосредственное вычисление несобственного интеграла.*

В простейших случаях интеграл можно попробовать непосредственно вычислить. В процессе вычисления устанавливается, сходится ли интеграл.

2. *Исследование сходимости при помощи критерия Коши.*

Если непосредственное вычисление интеграла затруднительно, а выяснить, сходится ли интеграл, необходимо, то в ряде случаев может помочь самый общий критерий сходимости несобственных интегралов – критерий Коши. Отметим вместе с тем, что этот способ часто оказывается достаточно сложным при его применении, и по этой причине он не получил широкого распространения на практике, имея скорее теоретическое значение.

В большинстве же случаев для выяснения факта сходимости (или расходимости) несобственного интеграла применяют *признаки сравнения* (иногда по этой причине их называют признаками сходимости). Рассмотрим эти признаки подробнее.

4.7.1. Признак сходимости интегралов от неотрицательных функций.

Теорема сравнения

Рассмотрим вначале общие признаки сходимости для *неотрицательных* функций.

Пусть функция $f(x)$ определена, неотрицательна (положительна) на $[a, +\infty)$ и собственно интегрируема на любом сегменте $[a, A]$, где $A \geq a$. Тогда интеграл

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx$$

является, очевидно, монотонно неубывающей (возрастающей) функцией аргумента A .

Теорема 1 (признак сходимости для несобственных интегралов 1-го рода). Для сходимости несобственного интеграла 1-го рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(A)$ с ростом A оставалась ограниченной сверху, т.е. $\exists L : \int_a^A f(x) dx \leq L \quad \forall A \geq a$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, тогда очевидно выполнение следующего неравенства:

$$0 \leq F(A) \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{для любого } A \geq a.$$

Это означает, что функция $F(A)$ ограничена сверху.

Перейдём к достаточности. Так как функция $F(A)$ не убывает и ограничена сверху, то существует конечный предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$. Но это и означает,

по определению, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

Теорема 2 (теорема сравнения для интегралов 1-го рода).

Если при $x \geq A \geq a$ имеет место неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (1)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (2)$$

причём для их значений имеет место неравенство

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx,$$

а из расходимости интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Доказательство. Так как $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то, согласно критерию

Коши, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $A_0 = A_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $A', A'' > A_0$ выполняется:

$$\int_{A'}^{A''} f(x) dx \leq \int_{A'}^{A''} g(x) dx < \varepsilon.$$

Это означает, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Второе утверждение теоремы немедленно следует из первого. Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$, говорят, что интеграл

(1) *мажорирует* интеграл (2).

Сформулируем аналоги этих теорем для интегралов 2-го рода. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на сегменте $[a, b]$ и имеет на правом его конце (в точке $x = b$) единственную особую точку 2-го рода.

Теорема 1.1 (признак сходимости для несобственных интегралов 2-го рода). Для сходимости несобственного интеграла 2-го рода $\int_a^b f(x) dx$ необ-

ходимо и достаточно, чтобы при любом (достаточно малом) $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq L$ ($L = \text{const}$).

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2.1 (теорема сравнения для интегралов 2-го рода). Если найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что $\forall x \in [b - \varepsilon, b]$ (т.е. при достаточно близких к b значений x) имеет место неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^b g(x) dx \quad (3)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (4)$$

причём для их значений имеет место неравенство

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

В свою очередь, из расходимости интеграла (4) следует расходимость интеграла (3).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 и опирается на критерий Коши сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2 \cos^2 x}$.

Решение. Единственная особая точка $+\infty$. Так как при $x \geq 0$ справедливо неравенство $\frac{x}{1 + x^2 \cos^2 x} \geq \frac{x}{1 + x^2}$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}$$

расходится, то расходится и исследуемый интеграл.

В частности, следствиями теоремы сравнения являются многие признаки сходимости несобственных интегралов. Рассмотрим эти признаки.

4.7.2. Первый признак сравнения (признак абсолютной сходимости)

Теорема (1-й признак сравнения, или признак абсолютной сходимости⁷). Пусть при любом $x \geq a$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq F(x).$$

Тогда если интеграл $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится, причём абсолютно.

Доказательство. Применив теорему сравнения к функциям $|f(x)|$ и $F(x)$, получим сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Замечание. 1-й признак сравнения относится к достаточным признакам, и поэтому не даёт ответа на вопрос о сходимости интеграла в тех случаях, когда его условия не выполняются.

Пример 1. Исследовать сходимость интегралов:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^3)}{(1+x^5)^2} dx; \text{ б) } \int_2^{+\infty} \frac{\arctg \sqrt[3]{x}}{x^{7/2}} dx.$$

Решение. а) Так как при $x \geq 1$ имеем: $\left| \frac{\cos(x^3)}{(1+x^5)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+x^5)^2} < \frac{1}{x^{10}}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ сходится, то, по 1-му признаку сравнения, интеграл сходится (в том числе абсолютно).

б) Так как при $x \geq 2$ верно: $\left| \frac{\arctg \sqrt[3]{x}}{x^{7/2}} \right| \leq \frac{\pi/2}{x^{7/2}}$, а интеграл $\frac{\pi}{2} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/2}}$ сходится, то, по 1-му признаку сравнения, интеграл сходится (в том числе абсолютно).

4.7.3. Второй признак сравнения

Пусть требуется выяснить сходимость (расходимость) несобственного интеграла

⁷ Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

где положительная подынтегральная функция $f(x)$ может иметь достаточно сложный вид. В некоторых случаях удаётся подобрать другую (более простого вида) положительную функцию $g(x)$, сходимость (расходимость) интеграла от которой известна, и сравнить скорости их убывания при $x \rightarrow +\infty$. В зависимости от этого делается вывод о сходимости интеграла от функции $f(x)$.

Теорема 1 (2-й признак сравнения для интегралов 1-го рода). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны на $[a, +\infty)$, и существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $0 < k < +\infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно;
- 2) если $k = 0$, то

из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

- 3) если $k = +\infty$, то

из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. 1) Из существования предела, равного k , следует $f(x) = g(x)(k + o(1))$ при $x \rightarrow +\infty$, а стало быть, $\frac{1}{2}kg(x) < f(x) \leq \frac{3}{2}kg(x)$ для всех достаточно больших $x \geq b$ (так как при достаточно больших значениях x , очевидно, справедлива оценка $|o(1)| \leq \frac{k}{2}$). В силу теоремы сравнения для интегралов 1-го рода, сходимость

интеграла $\int_b^{+\infty} g(x)dx$ влечёт сходимость интеграла $\int_b^{+\infty} f(x)dx$, а значит и ин-

теграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Обратно, в силу той же теоремы, сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ влечёт сходимость интеграла } \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2) Из существования предела k отношения функций следует $f(x) = g(x)o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, а стало быть, $f(x) \leq g(x)$ для всех достаточно больших $x \geq b$. Тогда в силу теоремы сравнения сходимость интеграла

$$\int_b^{+\infty} g(x)dx \text{ влечёт сходимость интеграла } \int_b^{+\infty} f(x)dx, \text{ а значит, и интеграла}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

3) Из условия $k = +\infty$ следует, что $g(x) = f(x)o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, а стало быть, $f(x) \geq g(x)$ для всех достаточно больших $x \geq b$. Но тогда в

силу теоремы сравнения расходимость интеграла $\int_b^{+\infty} g(x)dx$ влечёт расходимость

интеграла $\int_b^{+\infty} f(x)dx$, а значит, и интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Теорема доказана.

Пусть теперь требуется выяснить сходимость (расходимость) несобственного интеграла 2-го рода

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где положительная подынтегральная функция $f(x)$ неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Сравним скорости роста при $x \rightarrow b - \varepsilon$ подынтегральной функции и некоторой функции $g(x)$, сходимость (расходимость) интеграла от которой известна (легко устанавливается). В зависимости от этого делается вывод о сходимости интеграла от функции $f(x)$.

Теорема 2 (2-й признак сравнения для интегралов 2-го рода). Пусть функция $f(x)$ положительна и существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $0 < k < +\infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и

расходятся одновременно;

2) если $k = 0$, то

из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;

3) если $k = +\infty$, то

из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b f(x)dx$.

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Пример 1. Исследовать сходимость интегралов:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx; \text{ б) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[3]{x^5}} dx; \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx; \text{ г) } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{10} dx.$$

Решение. Исследуем сходимость интегралов в окрестности особой точки.

а) Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)/x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2x) = +\infty$.

Согласно 2-му признаку сравнения, из расходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ следует

расходимость данного интеграла.

б) Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)/x^{\frac{5}{3}}}{1/x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$.

Согласно 2-му признаку сравнения, из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ следу-

ет сходимость данного интеграла.

в) Сравним скорости роста в малой окрестности точки $x = 0$ подынтегральной функции и бесконечно большой функции $\frac{1}{x^k}$ ($k > 0$):

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin x)/\sqrt{x}}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-k}}.$$

При $\frac{1}{2} - k < 0$ имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-k}} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(x^{\frac{1}{2}-k}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{ctgx}}{\left(\frac{1}{2}-k\right)x^{-k-\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{1/2-k} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^{-k+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $k > \frac{1}{2}$ этот предел равен 0. Получили, что порядок роста при $x \rightarrow +0$ подынтегральной функции ниже, чем порядок роста бесконечно большой функции $\frac{1}{x^k}$, интеграл от которой сходится при $k < 1$. То есть если взять любое k такое, что $\frac{1}{2} < k < 1$, то, по 2-му признаку сравнения, исходный интеграл сходится.

г) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{10} dx = \int_0^1 e^{-x^2} x^{10} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} x^{10} dx$. Так как интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} x^{10} dx$ сходится (как собственный), то интегралы $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{10} dx$ и $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} x^{10} dx$ сходятся и расходятся одновременно. Исследуем сходимость второго интеграла. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2} x^{10}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/x^{12}} = 0$, то, согласно 2-му признаку

сравнения, из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ следует сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} x^{10} dx, \text{ а значит, и исходного интеграла.}$$

4.7.4. Третий признак сравнения (признак сравнения со степенью)

Этот признак формулируется для произвольных (не обязательно положительных) функций.

Теорема (3-й признак сравнения, или признак сравнения со степенью).

1. Для несобственных интегралов 1-го рода.

Если при $x \rightarrow +\infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой функцией порядка p по сравнению с бесконечно малой функцией $\frac{1}{x}$, т.е.

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right),$$

то при $p > 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а при $p \leq 1$ этот интеграл расходится.

2. Для несобственных интегралов 2-го рода.

Если при $x \rightarrow b-0$ функция $f(x)$ является бесконечно большой функцией порядка p по сравнению с бесконечно большой функцией $\frac{1}{b-x}$, т.е.

$$f(x) = O\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right),$$

то при $p < 1$ интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, а при $p \geq 1$ – расходится.

Доказательство вытекает из теоремы сравнения и поведения интегралов $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($a > 0$) и $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$, которые вычисляются явно при всех значениях параметра p .

Замечание. 3-й признак сравнения относится к необходимым и достаточным условиям сходимости несобственных интегралов. Он даёт ответ на во-

прос о сходимости (расходимости) интеграла во всех случаях, когда применим. При этом если интеграл сходится по этому признаку, то он сходится *абсолютно*.

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$.

Решение. Отметим, что данный интеграл I является несобственным, так как на промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ (особенность 2-го рода, в окрестности этой точки подынтегральная функция не ограничена) и $x = +\infty$ (особенность 1-го рода). Используя свойство аддитивности, представим интеграл I в виде суммы двух интегралов I_1 и I_2 так, чтобы в каждом из полученных в результате интегралов осталось по одной особой точке:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}} + \int_A^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}} = I_1 + I_2$$

(в качестве A можно взять любое положительное число), и исследуем сходимость каждого из них (интеграл I сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся интегралы I_1 и I_2).

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $x \rightarrow +0$ $x \gg x^3$, поэтому подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$ эквивалентна бесконечно большой функции степенного вида $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (являющейся главным членом подынтегральной функции), т.е. $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$, и интегралы от них сходятся и расходятся одновременно. Так как $\frac{1}{2} < 1$, то, по 3-му признаку сравнения для интегралов 2-го рода, интеграл I_1 сходится.

2) Исследуем сходимость интеграла I_2 . При $x \rightarrow +\infty$ оценим порядок малости подынтегральной функции: $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ (главный член подынтегральной функции), а значит, интегралы от этих функций сходятся и расходятся одновременно. Так как $\frac{3}{2} > 1$, то, по 3-му признаку сравнения для интегралов 1-го рода, интеграл I_2 сходится.

Таким образом, так как интегралы I_1 и I_2 сходятся, то сходится и их сумма – интеграл I .

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Решение. На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ (особенность 2-го рода) и $x = +\infty$ (особенность 1-го рода). Представим интеграл в виде суммы двух интегралов I_1 и I_2 так, чтобы в каждом из полученных в результате интегралов осталось по одной особой точке:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^A \frac{dx}{x^p} + \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = I_1 + I_2$$

($A > 0$ – любое число), и исследуем сходимость каждого из них.

- 1) Интеграл I_1 сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.
- 2) Интеграл I_2 сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Таким образом, при любом $p \neq 1$ один из интегралов I_1 или I_2 сходится, а другой расходится, поэтому их сумма есть расходящийся интеграл. При $p = 1$ оба интеграла, а значит, и их сумма, расходятся.

Ответ: интеграл расходится при любом p .

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$.

Решение. 1) Пусть $p = q$, тогда интеграл имеет вид $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ и, следовательно, расходится при любом p .

2) Пусть теперь $p < q$, тогда при $x \rightarrow +0$ для подынтегральной функции имеем: $f(x) = \frac{1}{x^p + x^q} = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$; при $x \rightarrow +\infty$ $f(x) = \frac{1}{x^p + x^q} = O\left(\frac{1}{x^q}\right)$, поэтому интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$, $q > 1$.

3) Если $p > q$, то аналогичными рассуждениями получим, что интеграл сходится при $p > 1$, $q < 1$.

Итак, интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p \neq q$, причём $\min(p, q) < 1$, а $\max(p, q) > 1$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \dots |x-a_n|^{p_n}} \quad (a_1 < a_2 < \dots < a_n).$$

Решение. В окрестности точки $x = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, подынтегральная

функция $f(x)$ есть $O\left(\frac{1}{|x-a_k|^{p_k}}\right)$, поэтому, чтобы интеграл сходился в

окрестностях всех точек $x = a_k$, необходимо, чтобы $p_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

При $x \rightarrow \infty$ имеем: $f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{p_1+p_2+\dots+p_n}}\right)$, следовательно, интеграл

сходится при условии $p_1 + p_2 + \dots + p_n > 1$.

Итак, интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p_k < 1$,

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{k=1}^n p_k > 1.$$

4.7.5. Признак Дирихле⁸

Специальные признаки сравнения используются при исследовании на сходимость интегралов вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx, \quad (1)$$

в том числе в тех случаях, когда данный интеграл сходится, но не обязательно абсолютно. Они основаны на применении 2-й теоремы о среднем и аналогичны признакам Дирихле и Абеля сходимости бесконечных рядов, поэтому их часто связывают с именами этих математиков.

Пусть на промежутке интегрирования имеется единственная особая точка $x = +\infty$.

Теорема (признак Дирихле). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, +\infty)$, причём:

⁸ Петер Густав Лежен-Дирихле – немецкий математик (1805–1859). См. также Приложение (поэт.).

1) $f(x)$ интегрируема в любом конечном сегменте $[a, A]$, причём $\exists K = \text{const} : \forall A \geq a$

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K \quad (\text{константа } K \text{ не зависит от } A);$$

2) $g(x)$ интегрируема на $[a, +\infty)$ и монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда интеграл (1) сходится.

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим для определённости случай, когда функция $g(x)$ не возрастает (второй случай рассматривается аналогично). Так как $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, то найдётся такое число

$A_0 > a$, что $0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{K}$ при $x > A_0$. Пусть A_1, A_2 – произвольные числа, для которых выполнено неравенство $A_0 < A_1 < A_2$. Применим вторую теорему о среднем. Согласно этой теореме, найдётся такая точка $\xi \in [A_1, A_2]$, что

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| = \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{K} \left| \int_{A_1}^{\xi} f(x)dx \right| \leq \varepsilon$$

в силу ограниченности интеграла от функции $f(x)$ на любом конечном сегменте. Отсюда и из критерия Коши сходимости несобственного интеграла сразу следует сходимость интеграла (1).

Замечание. Признак Дирихле является достаточным признаком, и поэтому не даёт ответа на вопрос о сходимости интеграла в тех случаях, когда его условия не выполняются.

Пример 1. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx.$$

Решение. Положим $t = x^2$, тогда $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, и изменению x

от 0 до $+\infty$ отвечает монотонное изменение t также от 0 до $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Так как $\forall A \geq 0$ интеграл по любому конечному сегменту $[0, A]$ от функции $f(t) = \sin t$ ограничен:

$$\left| \int_0^A \sin t dt \right| = |\cos 0 - \cos A| \leq 2,$$

а функция $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow +\infty$, то, по признаку Дирихле, интеграл сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Решение. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^A \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = I_1 + I_2 \quad (A > 0),$$

и исследуем сходимость каждого из них.

1) Так как при $x \rightarrow +0$ $\frac{\sin^2 x}{x} \rightarrow 0$, то точка $x = 0$ не является особой

(в её правой окрестности функция ограничена). Доопределив в этой точке подынтегральную функцию её предельным значением, равным нулю, получим, что интеграл I_1 сходится (он существует, поскольку является собственным интегралом от непрерывной функции).

2) Представим интеграл I_2 в виде разности двух интегралов:

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Первый из полученных интегралов расходится (по 3-му признаку сравнения).

Второй интеграл сходится по признаку Дирихле, так как $\forall B \geq A$

$$\left| \int_A^B \cos 2x dx \right| = \left| \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_A^B \right| = \frac{1}{2} |\sin 2B - \sin 2A| \leq 1,$$

и функция $\frac{1}{x}$ монотонно стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, инте-

грал I_2 расходится как сумма расходящегося и сходящегося интегралов. Но тогда и исходный интеграл расходится.

4.7.6. Признак Абеля¹

Пусть, по-прежнему, необходимо выяснить, сходится ли интеграл вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx. \quad (1)$$

Теорема (признак Абеля). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, +\infty)$, причём:

- 1) $f(x)$ интегрируема в $[a, +\infty)$ (хотя бы и не абсолютно);
- 2) $g(x)$ монотонна и ограничена: $\exists L = \text{const} : |g(x)| \leq L \quad \forall x \geq a$.

Тогда интеграл (1) сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши сходимости несобственного интеграла. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как интеграл

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то найдётся такое число $A_0(\varepsilon) > a$, что для любых чисел A_1, A_2 , $A_0 < A_1 < A_2$, выполнено: $\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}$, где L – постоянная, ограничивающая функцию $g(x)$.

Воспользуемся теперь второй теоремой о среднем значении. Поскольку функция $g(x)$ монотонна на любом промежутке $[A'_1, A'_2]$, $A_0 < A'_1 < A'_2$, то найдётся такая точка $\xi \in [A'_1, A'_2]$, что

$$\left| \int_{A'_1}^{A'_2} f(x)g(x)dx \right| = \left| g(A'_1) \int_{A'_1}^{\xi} f(x)dx + g(A'_2) \int_{\xi}^{A'_2} f(x)dx \right| \leq L \left(\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2L} \right) = \varepsilon,$$

для любых чисел A'_1, A'_2 , $A_0 < A'_1 < A'_2$. Согласно критерию Коши, это означает, что интеграл (1) сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. В признаке Дирихле, по сравнению с признаком Абеля, первое условие несколько ослаблено, зато второе условие заменено более сильным.

Замечание 2. Признак Абеля, как и признак Дирихле, является достаточным признаком, и поэтому вопрос о сходимости интеграла в тех случаях, когда его условия не выполняются, остаётся открытым.

Пример 1. Исследовать сходимость интегралов:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos\left(\frac{1}{2x^3+1}\right)dx; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x+1)\sqrt{x^3+x}}.$$

Решение. а) Заметим, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится, так как его можно

представить в виде суммы $\int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$, где $0 < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1$,

$0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$, а функция $\cos(1/(2x^3+1))$ монотонно возрастает и ограничена: $|\cos(1/(2x^3+1))| \leq 1$. Согласно признаку Абеля, интеграл сходится.

б) Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$, который сходится по 3-му признаку сравнения. Функция $\frac{1}{\ln(x+1)}$ монотонно убывает при $x \rightarrow +\infty$ и ограничена: $0 < \frac{1}{\ln(x+1)} \leq \frac{1}{\ln 2}$. Поэтому, согласно признаку Абеля, интеграл сходится.

4.7.7. Признак Коши

Существуют и другие достаточные признаки для установления сходимости (расходимости) несобственных интегралов 1-го и 2-го родов, вытекающие из теоремы сравнения.

Теорема 1 (признак Коши для интегралов 1-го рода). Пусть функция $f(x)$ определена, положительна на промежутке $[a, +\infty)$ и при достаточно больших x имеет вид $f(x) = \frac{g(x)}{x^p}$ ($p > 0$).

Тогда: 1) если $p > 1$ и $g(x) \leq c < +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

¹ Нильс Генрих Абель – норвежский математик (1802–1829).

2) если же $p \leq 1$ и $g(x) \geq c > 0$, то этот интеграл расходится.

Для доказательства надо воспользоваться теоремой сравнения (теорема 2, пункт 4.7.1), при этом функцией сравнения является бесконечно малая функция

$$\frac{c}{x^p}.$$

Теорема 1.1 (признак Коши для интегралов 2-го рода). Пусть на любом сегменте вида $[a, b - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b - a$) функция $f(x)$ положительна и интегрируема по Риману, но неограничена в левой окрестности точки b . Пусть, кроме того, для достаточно близких к b значений x функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^p} \quad (p > 0).$$

Тогда: 1) если $p < 1$ и $g(x) \leq c < +\infty$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится;

2) если же $p \geq 1$ и $g(x) \geq c > 0$, то этот интеграл расходится.

Для доказательства надо воспользоваться теоремой сравнения (теорема 2.1, пункт 4.7.1), при этом функцией сравнения является бесконечно большая функция $\frac{c}{(b-x)^p}$.

Пример 1. Исследовать сходимость интегралов:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(\arctg(x^3 + 1))}{x^2} dx; \text{ б) } \int_2^{+\infty} \frac{2 - \cos^2(x-1)}{x} dx; \text{ в) } \int_1^2 \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x-1}} dx.$$

Решение. а) В данном случае $g(x) = \cos^2(\arctg(x^3 + 1)) \leq 1 < +\infty$ и $p = 2 > 1$. По признаку Коши, интеграл сходится.

б) Имеем $g(x) = 2 - \cos^2(x-1) \geq 1 > 0$ и $p = 1 \leq 1$. Следовательно, по признаку Коши, интеграл расходится.

в) Так как $g(x) = \arcsin \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{2}$ и $p = \frac{1}{2} < 1$, то, по признаку Коши, интеграл сходится.

4.7.8. Использование формулы Тейлора при исследовании сходимости интеграла

При оценке скорости убывания (роста) подынтегральной функции в окрестности особой точки (например, для последующего применения признаков сравнения) иногда бывает удобно воспользоваться её разложением по формуле Тейлора.

Простейший случай – замена функции в окрестности особой точки её главным членом, в том числе используя известные соотношения эквивалентности. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Исследовать сходимость интегралов:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{e^{\sin x} - 1} dx; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Решение. а) Заметим, что при $x \rightarrow +0$ под знаком интеграла имеем неопределённость $\frac{0}{0}$. Раскроем её, используя соотношения эквивалентности,

полученные с помощью формулы Маклорена. Имеем: $\ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim \sqrt[3]{x}$, $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$, поэтому подынтегральная функция в окрестности нуля есть $O\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$. Тогда, так как $\frac{2}{3} < 1$, по 3-му признаку сравнения, интеграл сходится.

б) Интеграл несобственный 1-го рода (с особой точкой $x = +\infty$). В окрестности бесконечно удалённой точки, т.е. при $x \rightarrow +\infty$, имеем: $\arctg x \sim \frac{\pi}{2}$,

$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \sim x^3$, поэтому подынтегральная функция имеет 3-й порядок малости по сравнению с бесконечно малой функцией $\frac{1}{x}$: $\frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, и,

поскольку $3 > 1$, то, согласно 3-му признаку сравнения для интегралов 1-го рода, данный интеграл сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла
$$\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{a^2}{x^2}} - e^{\frac{b^2}{x^2}} \right) dx.$$

Решение. Заметим, что при $x \rightarrow +0$ подынтегральная функция $f(x)$ стремится к конечному пределу, равному нулю, т.е. эта точка не является особой. Таким образом, единственная особая точка $x = +\infty$.

Так как при $x \rightarrow +\infty$ подынтегральная функция является бесконечно малой, то, применяя для неё разложение в ряд по формуле Маклорена, получаем

$$e^{\frac{a^2}{x^2}} - e^{\frac{b^2}{x^2}} = \frac{b^2 - a^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

т.е. функция $f(x)$ является при $x \rightarrow +\infty$ бесконечно малой функцией второго порядка малости по сравнению с бесконечно малой $\frac{1}{x}$. Так как $2 > 1$, то, по 3-му признаку сравнения, интеграл сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Выясним, является ли точка $x = 0$ особой точкой. Разлагая функции $e^{\pm x}$ в ряд Маклорена $e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, получим:

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 + x^2/3 + o(x^2)} - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Так как при $x \rightarrow +0$ значение подынтегральной функции стремится к $-\frac{1}{12}$, то эта точка не является особой.

Осталось исследовать сходимость интеграла при $x \rightarrow +\infty$. Так как вы-

ражение $\frac{x}{e^x - e^{-x}} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то подынтегральная функция является

бесконечно малой 2-го порядка по сравнению с бесконечно малой $\frac{1}{x}$. По 3-

му признаку сравнения, интеграл сходится в окрестности этой бесконечно удалённой точки.

Пример 4. Исследовать сходимость интегралов в зависимости от значений параметра p :

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^p} dx; \text{ б) } \int_0^1 \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^p} dx \quad (a > 0).$$

Решение. а) На промежутке интегрирования имеется единственная особая точка $x = 0$ (точнее, при $p > 0$ эта точка является особой). Выясним, при каких значениях параметра p интеграл сходится. Для этого найдём разложение подынтегральной функции $f(x)$ в окрестности особой точки (по формуле Маклорена):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x - x^2}{x^p} = \\ &= \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + o(x^3) - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x - x^2}{x^p} = \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^{p-3}}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, при $x \rightarrow +0$ подынтегральная функция имеет порядок роста, равный $p - 3$, по сравнению с бесконечно большой функцией $\frac{1}{x}$. По

3-му признаку сравнения для интегралов 2-го рода получаем, что интеграл сходится при $p - 3 < 1$, т.е. $p < 4$, и расходится в остальных случаях.

Замечание. При $p < 0$ подынтегральная функция непрерывна на сегменте $[0, 1]$, и интеграл сходится (существует) как собственный; при $p = 0$ подынтегральная функция $f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$ непрерывна на $(0, 1]$, а в нуле может быть доопределена до непрерывной своим предельным значением, поэтому интеграл также является собственным и, значит, сходится.

б) Разложим подынтегральную функцию $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ (это единственная точка на промежутке интегрирования, которая может быть особой) по формуле Маклорена:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{x \ln a} + e^{-x \ln a} - 2}{x^p} = \\ &= \frac{\left(1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + o(x^2)\right) + \left(1 - x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + o(x^2)\right) - 2}{x^p} = \\ &= \frac{x^2 \ln^2 a + o(x^2)}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^{p-2}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, при $x \rightarrow +0$ подынтегральная функция имеет порядок роста, равный $p-2$ (по сравнению с бесконечно большой в окрестности нуля функцией $\frac{1}{x}$). По 3-му признаку сравнения для интегралов 2-го рода получаем, что интеграл сходится при $p-2 < 1$, т.е. $p < 3$, и расходится в остальных случаях.

4.7.9. Исследование на абсолютную (условную) сходимость

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Если наряду с интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют *абсолютно сходящимся*, а функцию $f(x)$ – *абсолютно интегрируемой* в промежутке $[a, +\infty)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но не абсолютно, то в этом случае принято считать, что он *сходится условно*. Аналогичные определения вводятся для интегралов 2-го рода.

Теорема 1 (о связи между обычной и абсолютной сходимостями, для интегралов 1-го рода). Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (т.е. из абсолютной сходимости несобственного интеграла следует обычная сходимость). При этом справедливо неравенство

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Доказательство. 1) Докажем интегрируемость $f(x)$ (в предположении, что в каждом промежутке $[a, A]$, $A > a$, функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле). Применим критерий Коши сходимости несобственного интеграла (раздел 4.3.) к интегралу $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Так как этот интеграл, по

условию, сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $A_0(\varepsilon) > a$, что для любых $A'' > A' > A_0$ выполняется

$$\int_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Так как, очевидно, $\left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| \leq \int_{A'}^{A''} |f(x)|dx$, то, следовательно, для тех же

A', A'' тем более выполняется неравенство $\left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon$. Отсюда, в силу критерия Коши, вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2) Докажем справедливость неравенства. Для любого $A \in (a, +\infty)$ имеем

$$-\int_a^A |f(x)|dx \leq \int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A |f(x)|dx.$$

Переходя к пределу при $A \rightarrow +\infty$ в этом двойном неравенстве, получим необходимое утверждение.

Замечание. Обращаем внимание на отличие этого свойства от аналогичного свойства интегралов Римана (там из интегрируемости на сегменте $[a, b]$ функции $|f(x)|$ не вытекала, вообще говоря, интегрируемость функции $f(x)$).

Теорема 2 (достаточный признак абсолютной сходимости, для интегралов 1-го рода). Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, +\infty)$, а функция $g(x)$ ограничена на этом промежутке, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ будет функцией, абсолютно интегрируемой в $[a, +\infty)$.

Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq L|f(x)|,$$

где $|g(x)| \leq L$, и теоремой сравнения.

Например, рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + k^2} dx$ ($k \neq 0$). Здесь функция

$f(x) = \frac{1}{x^2 + k^2}$ абсолютно интегрируема на $[0, +\infty)$, а функция $g(x) = \cos ax$, очевидно, ограничена. Поэтому данный интеграл сходится абсолютно.

Приведём аналогичные утверждения для несобственных интегралов 2-го рода (с особой точкой b).

Теорема 1.1 (о связи между обычной и абсолютной сходимостями, для интегралов 2-го рода). Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$, то сходится и

интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Теорема 2.2 (достаточный признак абсолютной сходимости, для интегралов 2-го рода). Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в собственном смысле, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ будет функцией, абсолютно интегрируемой в указанном промежутке.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ (интеграл Дирихле); б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

Решение. а) Представим интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + I_2$$

(где $A > 0$ – любое число).

1) *Исследуем интеграл на сходимость.* Поскольку подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна на полуинтервале $(0, A]$ и ограничена, то интеграл I_1 существует как собственный интеграл (функцию $f(x)$ мож-

но доопределить в точке $x = 0$ предельным значением, равным 1 ($\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$) до непрерывной на сегменте $[0, A]$).

Интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле, так как $\forall B \geq A$

$$\left| \int_A^B \sin x dx \right| = |-\cos B + \cos A| \leq 2,$$

а функция $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому интеграл I сходится.

2) *Исследуем интеграл на абсолютную сходимость.* Выпишем интеграл $\bar{I} = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ и разобьём его в сумму двух интегралов:

$$\bar{I} = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^A \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx + \int_A^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Интеграл $\bar{I}_1$ сходится (как собственный).

Так как $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x \leq |\sin x|$, то для интеграла $\bar{I}_2$ имеем оценку:

$$\frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \leq \int_A^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_A^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx.$$

Интеграл $\frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится (по 3-му признаку сравнения), а интеграл

$\int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится (по признаку Дирихле: $\forall B \geq A$

$$\left| \int_A^B \cos 2x dx \right| = \frac{1}{2} |\sin 2B - \sin 2A| \leq 1,$$

а функция $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$). Поэтому разность этих интегралов есть расходящийся интеграл, но тогда интеграл $\bar{I}_2$, мажорирующий расходящийся, также расходится.

Так как интеграл I сходится, но не абсолютно, то, следовательно, он сходится условно.

б) 1) Исследуем интеграл на сходимость.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

При $x \rightarrow +0$ имеем: $\sin x \sim x$, поэтому $\frac{\sin x}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$, и, по 3-му признаку сравнения, интеграл I_1 сходится (в том числе абсолютно) при $p-1 < 1$, т.е. $p < 2$, и расходится при $p \geq 2$.

Пусть $x \rightarrow +\infty$. При $p > 0$ интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле (так как $\forall B \geq A$

$$\left| \int_A^B \sin x dx \right| = |-\cos B + \cos A| \leq 2,$$

а функция $\frac{1}{x^p} \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$). При $p \leq 0$ интеграл I_2 расходится по критерию Коши (см. пример 1 раздела 4.3 выше). Поэтому интеграл I сходится при $0 < p < 2$.

2) Исследуем интеграл на абсолютную сходимость (при $0 < p < 2$).

Представим интеграл $\bar{I} = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ в виде суммы двух интегралов:

$$\bar{I} = \int_0^A \frac{|\sin x|}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Как было показано выше, интеграл $\bar{I}_1$ сходится. Исследуем сходимость $\bar{I}_2$.

Так как $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x \leq |\sin x| \leq 1$, то для интеграла $\bar{I}_2$ имеем оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} J_2 &= \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx = \\ &= \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = J_1. \end{aligned}$$

Во-первых, при $1 < p < 2$ интеграл J_1 , мажорирующий интеграл $\bar{I}_2$, сходится, а значит, по теореме сравнения, сходится и интеграл $\bar{I}_2$, а это, в свою очередь, означает, что I_2 сходится абсолютно. Во-вторых, при $0 < p \leq 1$ интеграл J_1 расходится, а интеграл J_2 сходится (по признаку Дирихле: $\forall B \geq A \left| \int_A^B \cos 2x dx \right| \leq 1$, а функция $\frac{1}{x^p} \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$). Поэтому разность этих интегралов есть расходящийся интеграл, но тогда интеграл $\bar{I}_2$, мажорирующий расходящийся, также расходится.

Итак, при $1 < p < 2$ интеграл сходится абсолютно; при $0 < p \leq 1$ интеграл сходится условно, а при $p \leq 0$ и $p \geq 2$ – расходится.

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx \quad (q > 0).$$

Решение. Сделаем замену $t = x^q$, тогда $x = t^{\frac{1}{q}}$, $dx = \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt$ и полу-

чим интеграл $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p}{q}} \sin t \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{q}}} dt = \frac{1}{q} I$. Разобьём интеграл

I на сумму двух интегралов

$$I = \int_0^A \frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{q}}} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{q}}} dt = I_1 + I_2.$$

Обозначим $\alpha = 1 - \frac{p+1}{q}$.

1) Исследуем интеграл I на сходимость.

При $t \rightarrow +0$ имеем: $\sin t \sim t$, поэтому $\frac{\sin t}{t^\alpha} = O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$, и, по 3-му

признаку сравнения, интеграл I_1 сходится (в том числе абсолютно) при $\alpha - 1 < 1$, т.е. $\alpha < 2$, и расходится при $\alpha \geq 2$.

Пусть $t \rightarrow +\infty$. При $\alpha > 0$ интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле ($\forall B \geq A \left| \int_A^B \sin t dt \right| = |-\cos B + \cos A| \leq 2$, а функция $\frac{1}{t^\alpha} \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow +\infty$). При $\alpha \leq 0$ интеграл I_2 расходится (по критерию Коши). Поэтому интеграл I сходится при $0 < \alpha < 2$.

2) Исследуем интеграл на абсолютную сходимость (при $0 < \alpha < 2$). Представим интеграл $\bar{I} = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt$ в виде суммы двух интегралов:

$$\bar{I} = \int_0^A \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Как было показано выше, интеграл $\bar{I}_1$ сходится. Исследуем сходимость $\bar{I}_2$.

Так как $\frac{1 - \cos 2t}{2} = \sin^2 t \leq |\sin t| \leq 1$, то для интеграла $\bar{I}_2$ имеем оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} J_2 &= \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^\alpha} dt \\ &= \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} dt \leq \int_A^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \leq \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = J_1. \end{aligned}$$

Во-первых, при $1 < \alpha < 2$ интеграл J_1 , мажорирующий интеграл $\bar{I}_2$, сходится, а значит, по теореме сравнения, сходится и интеграл $\bar{I}_2$, а это, в свою очередь, означает, что I_2 сходится абсолютно. Во-вторых, при $0 < \alpha \leq 1$ интеграл J_1 расходится, а интеграл J_2 сходится (по признаку Дирихле: $\forall B \geq A$

$$\left| \int_A^B \cos 2t dt \right| \leq 1,$$

а функция $\frac{1}{t^\alpha} \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow +\infty$). Поэтому разность этих интегралов есть расходящийся интеграл, но тогда интеграл $\bar{I}_2$, мажорирующий расходящийся, также расходится.

Итак, при $1 < \alpha < 2$ интеграл сходится абсолютно; при $0 < \alpha \leq 1$ интеграл сходится условно, а при $\alpha \leq 0$ и $\alpha \geq 2$ – расходится. Осталось сделать обратную подстановку $\alpha = 1 - \frac{p+1}{q}$.

Ответ:

интеграл сходится абсолютно при $1 < 1 - \frac{p+1}{q} < 2$, т.е. $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$;

интеграл сходится условно при $0 < 1 - \frac{p+1}{q} \leq 1$, т.е. $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$;

интеграл расходится при $1 - \frac{p+1}{q} \leq 0$ и $1 - \frac{p+1}{q} \geq 2$, т.е.

$$\frac{p+1}{q} \geq 1 \text{ и } \frac{p+1}{q} \leq -1.$$

4.8. Другие виды задач, связанных с несобственными интегралами

Ниже в параграфах 5–9 будут рассмотрены геометрические и физические приложения определённых интегралов и приведены примеры некоторых задач, сводимых к вычислению несобственных интегралов. Рассмотрим в данном пункте ещё несколько задач, так или иначе связанных с несобственными интегралами и их свойствами.

Пример 1. Найдите $\lim_{x \rightarrow +0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$.

Решение. Выясним поведение функции $\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$ при $x \rightarrow +0$. По 1-й теореме о среднем имеем:

$$\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = \cos \xi \cdot \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \cos \xi \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_x^1 = \cos \xi \cdot \left(-1 + \frac{1}{x} \right),$$

где $x < \xi < 1$. Так как при $x \rightarrow +0$ имеем $\left(-1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow +\infty$, то это беско-

нечно большая функция. Следовательно, данный предел $\lim_{x \rightarrow +0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$

представляет собой неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Чтобы раскрыть эту неопределённость, преобразуем её в неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и затем воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \right)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1.$$

Пример 2. Верно ли, что если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$? Рассмотрим пример $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ (интеграл Френеля). Существует ли функция, непрерывная и положительная на $[0, +\infty)$ такая, что $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится, но $f(x)$ не стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

Решение. 1) Ответ на первый вопрос, вообще говоря, отрицательный. Покажем, что интеграл Френеля сходится. В самом деле, положим в нём $t = x^2$, тогда $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$. Так как $\forall A \geq 0$ интеграл по любому конечному сегменту $[0, A]$ от функции $f(t) = \sin t$ ограничен: $\left| \int_0^A \sin t dt \right| = |\cos 0 - \cos A| \leq 2$, а функция $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow +\infty$, то, по признаку Дирихле, интеграл сходится. Однако при этом функция $y = \sin(x^2)$, очевидно, не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$.

2) Да, в качестве такой функции можно взять, например, $f(x) = e^{-x} + h(x)$, где $h(x)$ – функция, равная нулю вне отрезков $\left[k - \frac{1}{k^2}, k + \frac{1}{k^2} \right]$ ($k = 2, 3, \dots$), равная единице при $x = 2, 3, \dots$ и линейная

на отрезках $\left[k - \frac{1}{k^2}, k \right]$ и $\left[k, k + \frac{1}{k^2} \right]$.

Пример 3. Доказать, что значение интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ не зависит от параметра α .

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = I_1 + I_2.$$

Сделаем в первом из интегралов замену $y = \frac{1}{x}$, тогда придём к интегралу

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})},$$

или, переобозначая переменную интегрирования, $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{-\alpha})}$.

Но тогда

$$I_1 + I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{-\alpha})} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} =$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^{-\alpha}} + \frac{1}{1+x^\alpha} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} + \frac{1}{1+x^\alpha} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

что не зависит от α .

4.9. Некоторые известные несобственные интегралы

1. Интегральные синус и косинус

$$six = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (x \geq 0) \text{ и } cix = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0).$$

2. Интеграл Эйлера–Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0).$$

3. Интегралы Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. Интегралы Эйлера $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

5. Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a.$

6. Интегралы Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(bx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \quad (a, b > 0).$$

7. Гамма- и бета-функции

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (p > 0),$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0).$$

8. Интегралы Фруллани $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \quad (a, b > 0).$

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к §4

Задачи на свойства и вычисление несобственных интегралов

1. Можно ли сходящийся несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x) dx$ от неограниченной функции $f(x)$, определённой на сегменте $[a, b]$, рассматривать, по аналогии с собственным интегралом, как предел соответствующей интегральной суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k, \text{ где } x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} \text{ и } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k?$$

2. Пусть интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

сходится и функция $\varphi(x)$ ограничена. Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx? \quad (2)$$

Привести соответствующий пример. Что можно сказать о сходимости интеграла (2), если интеграл (1) сходится абсолютно?

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в конечном (или бесконечном) промежутке $[a, b]$ и имеют в нём (или в каждой его конечной части – если промежуток бесконечен) конечное число особых точек. Доказать, что: а) если интегрируема функция $f^2(x)$, то и сама функция $f(x)$ будет абсолютно интегрируема (про такую функцию принято говорить, что она «интегрируема с квадратом»); б) если обе функции интегрируемы с квадратом, то и их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема с квадратом; в) при тех же предположениях и произведение $f(x) \cdot g(x)$ будет абсолютно интегрируемой функцией.

4. Найти среднее значение на интервале $(0, +\infty)$ следующих функций:

а) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$; б) $f(x) = \sqrt{x} \sin x.$

5. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$. Найти

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx.$$

6. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx; \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx; \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$$

7. Найти главные значения интегралов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx; \text{ б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx; \text{ в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx.$$

Исследование несобственных интегралов на сходимость

8. Убедившись, что интеграл несобственный, не вычисляя его, исследовать на сходимость:

$$\text{а) } \int_1^3 \frac{x^2 dx}{(x-1)^5}; \text{ б) } \int_1^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}; \text{ в) } \int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx.$$

9. Убедившись, что интеграл несобственный, исследуйте его сходимость:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}} dx; \text{ в) } \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}; \text{ г) } \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}; \\ \text{д) } \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx. \end{aligned}$$

10. Используя 1-й и 3-й признаки сравнения, исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}}; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx; \text{ в) } \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx; \text{ г) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1}}; \\ \text{д) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x^9}}}}. \end{aligned}$$

11. Используя 3-й признак сравнения, исследовать сходимость следующих интегралов (в зависимости от значений параметра):

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x}; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx; \text{ в) } \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0),$$

где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ – взаимно простые (не имеющие общих корней) многочлены соответственно степеней m и n .

12. Используя разложение подынтегральной функции по формуле Тейлора в окрестностях особых точек, исследовать (в зависимости от значений параметров) сходимость следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^n} dx \quad (a \neq 0); \text{ б) } \int_1^{+\infty} \frac{x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx; \\ \text{в) } \int_0^1 x^p \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) dx; \text{ г) } \int_0^1 \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^p} dx. \end{aligned}$$

13. Используя признаки Дирихле или Абеля, исследовать сходимость следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0); \text{ б) } \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0, p > 0); \text{ в) } \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx; \\ \text{г) } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arccos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx. \end{aligned}$$

14. Используя критерий Коши расходимости несобственных интегралов, доказать расходимость интегралов

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (a > 0, p \leq 0).$$

15. Исследовать сходимость интеграла в зависимости от значений параметра p :

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

16. Используя, в том числе, 2-й признак сравнения, исследовать сходимость интегралов в зависимости от значений параметров:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx; \text{ в) } \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

17. Исследовать (в зависимости от значений параметра) сходимость следующих интегралов:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx; \text{ б) } \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx; \text{ в) } \int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0);$$

$$\text{г) } \int_0^1 \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^p} dx; \text{ д) } \int_0^{+\infty} x^\alpha |x-1|^\beta dx.$$

18. Пусть интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится и равен J . Докажите, что инте-

грал $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ также сходится и равен J .

Исследовать сходимость следующих интегралов:

$$19. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

$$20. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2 \sin^2 x}.$$

$$21. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$$

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha (x+2)}{x+1} dx.$$

$$23. \int_0^\pi \ln(\sin x) dx.$$

$$24. \int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x} dx.$$

$$25. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\ln x)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$26. \int_0^{+\infty} x^x e^{-x^n} dx \quad (n \in \mathbb{R}).$$

$$27. \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx \quad (n \in \mathbb{R}).$$

$$28. \int_0^{+\infty} \sin^2 \left(\pi \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) dx.$$

Исследование несобственных интегралов на абсолютную (условную) сходимость

29. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx; \text{ б) } \int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx; \text{ в) } \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geq 0);$$

$$\text{г) } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{\ln x}} dx.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x^p} dx; \text{ б) } \int_0^1 \frac{\cos(1/(1-x))}{(1-x^2)^p} dx; \text{ в) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx \quad (p, q > 0);$$

$$\text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p} dx.$$

31. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx; \text{ в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x) dx;$$

$$\text{г) } \int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx,$$

где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ – целые многочлены и $P_n(x) > 0$, если $x \geq a \geq 0$.

§ 5.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

5.1. Плоская фигура и связанные с ней понятия

Приведём некоторые определения из теории множеств, имеющие отношение к данному параграфу.

Пусть на плоскости задана декартова (прямоугольная) система координат. Обозначим через R^2 множество всех точек плоскости. Пусть точка $M(x_0; y_0) \in R^2$.

Назовём ε -окрестностью точки M множество тех точек плоскости, которые расположены внутри круга радиуса ε с центром в точке M , т.е. множество

$$U_\varepsilon(M) = \{(x; y) \in R^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Пусть P – произвольное непустое подмножество R^2 . Точка $M \in P$ называется *внутренней* точкой множества P , если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(M) \subset P$. Точка M называется *внешней* точкой множества P , если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(M) \cap P = \emptyset$. Точку M назовём *граничной точкой* множества P , если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой множества P .² Совокупность всех граничных точек множества P называется его *границей*.

Множество $P \subset R^2$ называется *открытым*, если все его точки – внутренние. Множество $P \subset R^2$ называется *замкнутым*, если множество $R^2 \setminus P$ открыто. Множество $P \subset R^2$ называется *ограниченным*, если существует число $R > 0$ такое, что $P \subset U_R(O)$, где $O(0;0)$.

Многоугольной фигурой на плоскости назовём множество, составленное из конечного числа лежащих в этой плоскости ограниченных многоугольни-

² Заметим, что точка M является *граничной точкой* множества P тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в ε -окрестности точки M содержатся как точки, принадлежащие множеству P , так и точки, ему не принадлежащие.

ков (понятия многоугольника, а также его площади вводились в курсе средней школы).

Плоской фигурой назовём любое непустое ограниченное множество $P \subset R^2$. Две фигуры P_1 и P_2 называются *равными*, если существует взаимно однозначное соответствие с сохранением расстояния между точками, при котором фигура P_1 отображается на P_2 .

5.2. Квадрируемая фигура и её площадь

Обозначим символом $S(P)$ площадь многоугольной фигуры P .

Напомним, что площадь многоугольной фигуры – это неотрицательное число, удовлетворяющее следующим свойствам.³

1°. (*Инвариантность*). Если две многоугольные фигуры P_1 и P_2 равны между собой, то

$$S(P_1) = S(P_2).$$

2°. (*Аддитивность*). Если P_1 и P_2 – две многоугольные фигуры без общих внутренних точек и символ $P_1 \cup P_2$ обозначает объединение этих фигур, то

$$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2).$$

3°. (*Существование единицы*). Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины, равна единице измерения площади.

Последнее свойство означает, что величина площади фигуры существенным образом зависит от выбора единицы измерения в рассматриваемой системе координат.

Введём понятие площади для произвольной плоской фигуры F . Рассмотрим для этого всевозможные многоугольные фигуры P , целиком содержащиеся в F , и многоугольные фигуры Q , целиком содержащие F . Фигуры P будем называть *вписанными* в F , а фигуры Q – *описанными* около F .

Числовое множество $\{S(P)\}$ площадей всех вписанных многоугольных фигур P ограничено сверху, например, площадью любой описанной многоугольной фигуры Q . Поэтому это множество имеет конечную точную верхнюю грань

$$\underline{S} = \sup_{P \subset F} S(P),$$

³ А.В. Погорелов. Геометрия: Учебник для 7–11 кл. сред. шк. – 2-е изд. М.: Просвещение, 1991 (стр. 216).

которую будем называть *нижней площадью* фигуры F . Если в фигуру F нельзя вписать ни одного многоугольника, то по определению полагается $\underline{S} = 0$.

Аналогично, числовое множество $\{S(Q)\}$ площадей всех описанных около фигуры F многоугольных фигур Q ограничено снизу, например, площадью любой вписанной многоугольной фигуры или нулём, и поэтому у него существует конечная точная нижняя грань

$$\underline{S} = \inf_{Q \supset F} S(Q),$$

называемая *верхней площадью* фигуры F . Очевидно, что $\underline{S} \leq \bar{S}$.

Плоская фигура F называется *квадрируемой* (т.е. *имеющей конечную площадь*), если

$$\underline{S} = \bar{S}.$$

Число $S = \underline{S} = \bar{S}$ называется при этом *площадью* фигуры F (по Жордану).

Будем говорить, что плоская фигура F имеет *площадь, равную нулю*, если эта фигура содержится в многоугольной фигуре сколь угодно малой площади.

Перечисленные выше свойства многоугольных фигур (неотрицательность, аддитивность, инвариантность, существование единицы) сохраняются и для произвольных квадрируемых фигур. При этом доказательство свойства аддитивности в случае, когда квадрируемые фигуры имеют общие точки (принадлежащие границе каждого из них), не является тривиальным; оно будет приведено ниже (см. теорему 4).

Замечание 1. Подчёркнём, что свойство аддитивности выполняется для объединения любого *конечного* числа $F_1, F_2, \dots, F_n$ квадрируемых фигур без общих внутренних точек

$$S(F) = \sum_{i=1}^n S(F_i),$$

но уже объединение *счётной* совокупности квадрируемых фигур не является, вообще говоря, квадрируемой фигурой.

Например, рассмотрим множество F всех точек с рациональными координатами, принадлежащих квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$. Оно представляет собой счётное объединение квадрируемых фигур (точка, очевидно, является квадрируемой фигурой нулевой площади). С другой стороны, верхняя площадь данной фигуры $\bar{S}(F) = 1$, поскольку наименьшим многоугольником, содержащим множество F , является сам квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$; нижняя же площадь $\underline{S}(F) = 0$, поскольку в множество F нельзя вписать никакую много-

угольную фигуру ненулевой площади. Это означает, что фигура F не является квадрируемой.

Замечание 2. Непустое пересечение двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура.

Замечание 3. Понятие квадрируемости допускает обобщение на случай *неограниченных фигур* на плоскости.

Пусть F – неограниченная плоская фигура и $R > 0$ – действительное число. Обозначим $F_R = U_R(O) \cap F$ (всегда можно выбрать такое достаточно большое R , чтобы $F_R \neq \emptyset$). Пусть для любого такого R ограниченная фигура F_R квадрируема в смысле введённого выше определения. Если существует конечный предел

$$S = \lim_{R \rightarrow +\infty} S(F_R),$$

то назовём фигуру F *квадрируемой (в несобственном смысле)*, а число S – её площадью. При вычислении площадей таких фигур с помощью определённых интегралов будем получать сходящиеся несобственные интегралы 1-го или 2-го рода (см. примеры 5–7 ниже).

5.3. Необходимые и достаточные условия квадрируемости. Классы квадрируемых фигур

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие квадрируемости). Для того, чтобы плоская фигура F была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы её граница имела площадь нуль.

Доказательству этой теоремы предпошлим две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Плоская фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольная фигура $P \subset F$ и многоугольная фигура $Q \supset F$ такие, что $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть фигура F квадрируема, тогда $\underline{S}(F) = \bar{S}(F)$. По определению точной грани, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся многоугольная фигура $P \subset F$ такая, что

$$\underline{S}(F) - \frac{\varepsilon}{2} < S(P) \leq \underline{S}(F).$$

Аналогично найдётся многоугольная фигура $Q \supset F$ такая, что

$$\overline{S}(F) \leq S(Q) < \overline{S}(F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\underline{S}(F) = \overline{S}(F) = S(F)$, то, учитывая полученные неравенства, имеем:

$$S(F) - \frac{\varepsilon}{2} < S(P) \leq S(Q) < S(F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Теперь докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольные фигуры $P \subset F$ и $Q \supset F$ такие, что $S(Q) - S(P) < \varepsilon$. Так как $S(P) \leq \underline{S}(F) \leq \overline{S}(F) \leq S(Q)$, то

$$0 \leq \underline{S}(F) - \overline{S}(F) \leq S(Q) - S(P) < \varepsilon.$$

Но число $\varepsilon > 0$ произвольно, значения верхней и нижней площади фигуры F от него не зависят, значит,

$$\underline{S}(F) = \overline{S}(F).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Плоская фигура F квадратуема тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся квадратуемая фигура $P \subset F$ и квадратуемая фигура $Q \supset F$ такие, что $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость сразу следует из леммы 1, так как любая многоугольная фигура является квадратуемой. Докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся квадратуемые фигуры $P \subset F$ и $Q \supset F$ такие, что

$$S(Q) - S(P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как фигуры P и Q квадратуемы, то для них, согласно предыдущей лемме, найдутся многоугольные фигуры P' и Q' такие, что $P' \subset P$, $Q' \supset Q$, причём

$$S(P) - S(P') < \frac{\varepsilon}{4}, S(Q') - S(Q) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда $P' \subset F \subset Q'$ и

$$S(Q') - S(P') < S(Q) + \frac{\varepsilon}{4} - S(P) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что фигура F квадратуема. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть P, Q – произвольные многоугольные фигуры, такие, что $P \subset F \subset Q$. Напомним, что для многоугольных фигур справедливо свойство аддитивности площади: $S(Q \setminus P) = S(Q) - S(P)$. Необходимость условия теоремы 1 вытекает теперь из того факта, что многоугольная фигура $Q \setminus P$ содержит все точки границы ∂F плоской фигуры F (см. лемму 1).

Докажем достаточность. Впишем фигуру F в квадрат I со сторонами, параллельными осям координат. Пусть h – достаточно малое положительное число. Разобьём квадрат I на более мелкие квадраты I_h со сторонами, равными h .

Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть граница ∂F плоской фигуры F содержится в многоугольной фигуре площади, меньшей ε . Покажем, что в этом случае существует число $h > 0$ такое, что ∂F содержится также в некотором объединении квадратов I_h , общая площадь которых меньше, чем 32ε .

Действительно, заметим, что любая многоугольная фигура, площадь которой меньше ε , представляет собой сумму конечного числа треугольников, не имеющих общих внутренних точек; каждый такой треугольник равен объединению двух прямоугольных треугольников без общих внутренних точек; каждый прямоугольный треугольник содержится в прямоугольнике, вдвое большем его по площади; каждый прямоугольник содержится в объединении конечного числа квадратов, суммарная площадь которых не более, чем в два раза превышает площадь этого прямоугольника; каждый квадрат этого объединения содержится во вдвое большем его квадрате со сторонами, параллельными осям координат.

Таким образом, любая многоугольная фигура, площадь которой меньше ε , содержится в конечном объединении квадратов со сторонами, параллельными координатным осям, общей площади, меньшей 8ε .

Из указанного конечного набора квадратов выберем квадрат с наименьшей стороной и возьмём в качестве числа h половину длины стороны этого квадрата. При таком выборе h каждый указанный квадрат (со сторонами, параллельными осям координат) будет содержаться в конечном объединении квадратов I_h , общая площадь которых не превышает учетверённой площади этого квадрата.

Значит, вся многоугольная фигура площади, меньшей ε , содержится в конечном объединении квадратов I_h , суммарная площадь которых меньше, чем 32ε .

Для завершения доказательства заметим, что объединение всех квадратов I_h , состоящих только из внутренних точек фигуры F , представляет собой многоугольную фигуру P , причём $P \subset F$, а объединение этой фигуры P с теми квадратами I_h , которые содержат точки границы ∂F фигуры F , представляет собой многоугольную фигуру Q такую, что $Q \supset F$; при этом $S(Q) - S(P) < 32\varepsilon$. Отсюда и из леммы 1 вытекает утверждение теоремы.

Теорема полностью доказана.

Следствие. Площадь квадратуемой фигуры равна одному и тому же числу, независимо от того, с границей или без границы рассматривается эта фигура.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие квадратуемости). Для того чтобы плоская фигура F была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности многоугольных фигур $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, соответственно, содержащихся в F и содержащих в себе F , площади которых имели бы общий предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(B_n) = S(F).$$

Доказательство этой теоремы приведено в книге [17], глава X, §2. Оно также легко может быть получено из доказанных выше лемм 1 и 2.

Теорема 3 (достаточное условие квадратуемости). Для того чтобы плоская фигура была квадратуемой, достаточно, чтобы её граница была спрямляемой⁴ кривой.

Доказательство. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. Всякая спрямляемая кривая имеет площадь нуль.

Доказательство. Пусть L – спрямляемая кривая, а $|L|$ – её длина. Разобьём эту кривую $n+1$ точками $x_0, \dots, x_n$ на равные части, каждая из которых имеет длину $\frac{|L|}{n}$. Примем каждую из точек x_j за центр квадрата со стороной $\frac{2|L|}{n}$. Объединение этих квадратов представляет собой многоугольную фигуру, описанную около кривой L . Площадь этой фигуры, очевидно,

равна $\frac{4|L|^2}{n^2}(n+1)$. Так как число $|L|$ фиксировано, а n можно сделать сколь угодно большим, то верхняя площадь фигуры L равна нулю. Значит, кривая L имеет нулевую площадь. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 теперь сразу следует из леммы 3 и теоремы 1.

Теперь мы можем доказать свойство аддитивности площади квадратуемой фигуры.

Теорема 4. Пусть F_1 и F_2 – квадратуемые фигуры без общих внутренних точек, F – их объединение. Тогда фигура F квадратуема, причём

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2).$$

Доказательство. Квадратуемость фигуры F следует из теоремы 1 и того факта, что граница ∂F фигуры F имеет площадь нуль, так как она является частью объединения границ ∂F_1 и ∂F_2 фигур F_1 и F_2 .

Докажем справедливость равенства $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$. Рассмотрим многоугольные фигуры P_1, P_2, Q_1, Q_2 такие, что $P_1 \subset F_1 \subset Q_1$, $P_2 \subset F_2 \subset Q_2$. Обозначим $P = P_1 \cup P_2$, $Q = Q_1 \cup Q_2$. Так как фигуры P_1 и P_2 не имеют общих внутренних точек, то площадь многоугольной фигуры P можно представить в виде: $S(P) = S(P_1) + S(P_2)$. Фигуры Q_1 и Q_2 могут пересекаться, поэтому можем утверждать лишь, что $S(Q) \leq S(Q_1) + S(Q_2)$. Значит,

$$S(P) = S(P_1) + S(P_2) \leq S(F) \leq S(Q) \leq S(Q_1) + S(Q_2).$$

С другой стороны, в силу определения квадратуемости, для фигур F_1 и F_2 справедливы неравенства

$$S(P_1) \leq S(F_1) \leq S(Q_1), \quad S(P_2) \leq S(F_2) \leq S(Q_2),$$

из которых следует, что

$$S(P_1) + S(P_2) \leq S(F_1) + S(F_2) \leq S(Q_1) + S(Q_2).$$

Таким образом, обе величины $S(F)$ и $S(F_1) + S(F_2)$ заключены между числами $S(P_1) + S(P_2)$ и $S(Q_1) + S(Q_2)$, разница между которыми

$$\begin{aligned} & (S(Q_1) + S(Q_2)) - (S(P_1) + S(P_2)) = \\ & = (S(Q_1) - S(P_1)) + (S(Q_2) - S(P_2)) \end{aligned}$$

может быть сделана сколь угодно малой. Это означает, что указанные величины равны между собой. Теорема 4 полностью доказана.

⁴ Определение спрямляемой (т.е. имеющей конечную длину) кривой см. в разделе 6.2 параграфа 6.

Приведённые теоремы описывают достаточно широкий класс квадратуемых фигур. Выделим две основные группы квадратуемых фигур, чаще других встречающиеся при решении задач на вычисление площадей.

1. Если плоская фигура F ограничена несколькими *непрерывными* кривыми, каждая из которых определяется явным уравнением $y = y(x)$ или $x = x(y)$, то эта фигура квадратуема.

2. Если плоская фигура F ограничена одной или несколькими *гладкими*⁵ кривыми, то она квадратуема.

5.4. Площадь в декартовых координатах

Рассмотрим практический вопрос о вычислении площадей плоских фигур при помощи обычных определённых интегралов.⁶ Обратимся к наиболее типичным случаям.

5.4.1. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана явно

1. Фигура задана стандартно относительно оси Ox .

Рассмотрим фигуру F в системе прямоугольных координат Oxy , ограниченную сверху графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $y = y(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, и снизу – отрезком оси Ox между точками a и b . Эту фигуру будем называть *криволинейной трапецией, прилегающей к оси Ox* ; её можно задать как множество точек плоскости

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq y(x)\}.$$

Теорема 1. Криволинейная трапеция F , прилегающая к оси Ox , представляет собой квадратуемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле

$$S(F) = \int_a^b y(x) dx. \quad (1)$$

⁵ Назовём кривую, заданную параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$, *гладкой*, если: 1) функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на всём промежутке изменения параметра; 2) на кривой нет ни кратных, ни вообще особых точек ([12], стр. 441).

⁶ Площади плоских фигур могут быть вычислены также при помощи *двойных интегралов* (см., например, [18], глава XVI, §1).

Доказательство. Так как функция $y(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[a, b]$ такое, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$, где $S(T)$, $s(T)$ – соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $y(x)$, отвечающие разбиению T (критерий Римана интегрируемости функции на сегменте).

Рассмотрим многоугольные фигуры P и Q , состоящие из прямоугольников со сторонами

$$[x_{k-1}, x_k], [0, \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} y(x)] \text{ и } [x_{k-1}, x_k], [0, \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} y(x)],$$

$k = 1, \dots, n$, соответственно. Тогда очевидно, что $P \subset F \subset Q$, причём $S(P) = s(T)$, $S(Q) = S(T)$. Значит, $S(Q) - S(P) < \varepsilon$, т.е. фигура F квадратуема (лемма 1 раздела 5.3). С другой стороны, так как $s(T) \leq \int_a^b y(x) dx \leq S(T)$ и $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$, то получаем, что для

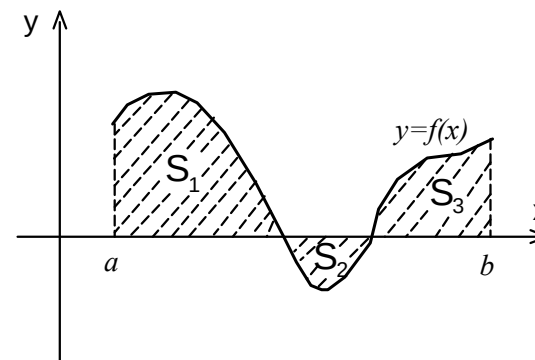
любого $\varepsilon > 0$ выполнено:

$$\left| S(F) - \int_a^b y(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Так как площадь фигуры и интеграл от функции $y(x)$ по сегменту $[a, b]$ – числа, не зависящие от выбора ε , то из последнего неравенства следует, что

$$S(F) = \int_a^b y(x) dx. \text{ Теорема доказана.}$$

Следствие 1. Если функция $y(x)$ на сегменте $[a, b]$ не сохраняет постоянного знака, принимая как положительные, так и отрицательные значения, то указанный интеграл равен алгебраической сумме (т.е. взятых с определённым знаком) площадей криволинейных трапеций, расположенных выше и ниже оси Ox между точками a и b . При этом площади первых берутся



янного знака, принимая как положительные, так и отрицательные значения, то указанный интеграл равен алгебраической сумме (т.е. взятых с определённым знаком) площадей криволинейных трапеций, расположенных выше и ниже оси Ox между точками a и b . При этом площади первых берутся

со знаком плюс, а вторых – со знаком минус:

$$\int_a^b y(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$$

(при этом $\int_a^b |y(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3$). Это вытекает из того, что графики функций $y(x)$ и $|y(x)|$ на участках отрицательности функции $y(x)$ симметричны друг другу относительно оси абсцисс.

Следствие 2. Рассмотрим теперь криволинейную трапецию более общего вида, а именно, ограниченную снизу и сверху графиками непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ таких, что $y_1(x) \leq y_2(x)$ при $x \in [a, b]$. Такую фигуру также будем относить к заданным стандартно относительно оси Ox ; её можно описать как следующее множество

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Площадь указанной криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx. \quad (2)$$

2. Фигура задана стандартно относительно оси Oy .

Криволинейной трапецией, прилежащей к оси Oy , назовём фигуру, ограниченную справа графиком заданной на сегменте $[c, d]$ непрерывной и неотрицательной функции $x = x(y)$, снизу и сверху – прямыми $y = c$ и $y = d$, слева – отрезком оси Oy между точками c и d . Такую криволинейную трапецию можно описать как множество

$$F = \{(x; y) \mid c \leq y \leq d; 0 \leq x \leq x(y)\}.$$

Теорема 2. Криволинейная трапеция F , прилежащая к оси Oy , представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле

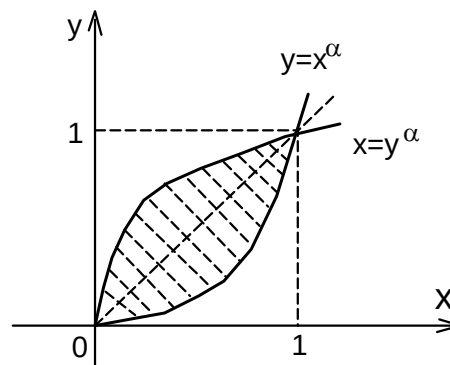
$$S(F) = \int_c^d x(y)dy. \quad (1')$$

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Для криволинейной трапеции в случае её прилегания к оси ординат справедливы следствия, аналогичные приведённым выше следствиям 1 и 2.

Рассмотрим примеры.

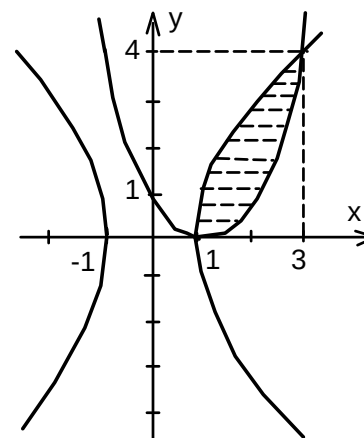
Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками степенных функций $y = x^\alpha$ и $x = y^\alpha$ ($\alpha \geq 1$).



Решение. Поскольку фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то её площадь может быть получена посредством вычитания из единицы (площади квадрата) удвоенной площади криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox и ограниченной сверху графиком функции $y = x^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $x \in [0, 1]$. По формуле (1) имеем

$$S = 1 - 2 \int_0^1 x^\alpha dx = 1 - 2 \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \quad (\text{кв.ед}).$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x-1)^2$ и гиперболой $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.



Решение. Найдём точки пересечения параболы и гиперболы:

$$x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2+1) = 0.$$

Таким образом, кривые пересекаются в точках $(1;0)$ и $(3;4)$. Далее задачу можно решать двумя способами.

1-й способ. Рассмотрим данную фигуру как заданную стандартно относительно оси Ox . Определяем, что сверху фигура ограничена кривой $y = \sqrt{2(x^2-1)}$, а снизу – кривой

$y = (x-1)^2$, $x \in [1, 3]$, т.е. фигуру можно описать как множество
 $F = \{(x; y) \mid 1 \leq x \leq 3; (x-1)^2 \leq y \leq \sqrt{2(x^2-1)}\}$.

Следовательно, её площадь может быть вычислена по формуле (2):

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 (\sqrt{2(x^2-1)} - (x-1)^2) dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x\sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| \right) \Big|_1^3 - \frac{1}{3} (x-1)^3 \Big|_1^3 = \\ &= \frac{10}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(3 + \sqrt{8}) \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

2-й способ. С другой стороны, эту же фигуру можно рассмотреть как заданную стандартно относительно оси Oy . Действительно, она ограничена

слева кривой $x = \sqrt{\frac{y^2}{2} + 1}$, справа – кривой $x = 1 + \sqrt{y}$, $y \in [0, 4]$, т.е.

представляет собой множество

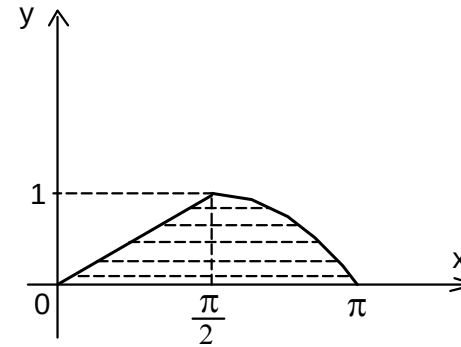
$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq y \leq 4; \sqrt{\frac{y^2}{2} + 1} \leq x \leq 1 + \sqrt{y}\},$$

и поэтому площадь фигуры можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(\sqrt{y} + 1 - \sqrt{\frac{y^2}{2} + 1} \right) dy = \\ &= \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + y - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y}{2} \sqrt{y^2 + 2} + \ln|y + \sqrt{y^2 + 2}| \right) \right) \Big|_0^4 = \\ &= \frac{10}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(3 + \sqrt{8}) \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

3. Если фигура не относится к рассмотренным случаям стандартного расположения относительно координатных осей, то в большинстве случаев её удаётся разбить на части, каждая из которых представляет собой стандартную область.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x/\pi$ ($x \in [0, \pi/2]$), $y = \sin x$ ($x \in [\pi/2, \pi]$) и осью абсцисс.



Решение.

1-й способ. Данная фигура не является стандартной относительно оси Ox , однако её можно разбить на две стандартные относительно оси Ox области:

$$F_1 = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{2x}{\pi}\},$$

$$F_2 = \{(x; y) \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

Тогда площадь фигуры равна сумме площадей фигур F_1 и F_2 :

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\pi} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} (x^2) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4} + 1 \text{ (кв.ед)}.$$

2-й способ. Фигура является стандартной относительно оси Oy и может быть задана как следующее множество:

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq y \leq 1; \frac{\pi y}{2} \leq x \leq \pi - \arcsin y\}.$$

В результате задача сводится к вычислению определённого интеграла

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left((\pi - \arcsin y) - \frac{\pi y}{2} \right) dy = \\ &= \left(\pi y - y \arcsin y - \sqrt{1-y^2} - \frac{\pi y^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + 1 \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

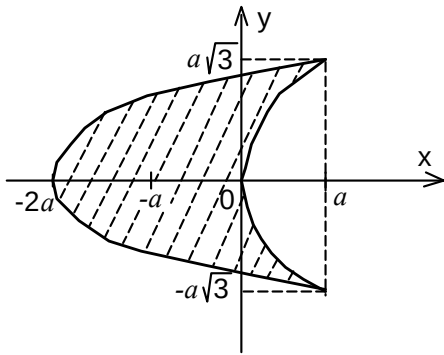
$$x^2 + 2ax - y^2 = 0 \text{ и } ax - y^2 + 2a^2 = 0 \quad (a > 0).$$

Решение. 1-й способ. Данная фигура не является стандартной относительно оси Ox , но её можно разбить на три стандартные относительно оси Ox области:

$$F_1 = \{(x; y) \mid -2a \leq x \leq 0; -\sqrt{2a^2 + ax} \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\},$$

$$F_2 = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq a; \sqrt{x^2 + 2ax} \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\},$$

$$F_3 = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq a; -\sqrt{2a^2 + ax} \leq y \leq -\sqrt{x^2 + 2ax}\}.$$



Из симметрии фигуры относительно оси Ox видно, что её площадь S есть удвоенная площадь фигуры, являющейся объединением двух стандартных относительно оси Ox фигур

$$\tilde{F}_1 = \{(x; y) \mid -2a \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\} \text{ и } F_2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S &= 2 \left(\int_{-2a}^0 \sqrt{2a^2 + ax} dx + \int_0^a (\sqrt{2a^2 + ax} - \sqrt{x^2 + 2ax}) dx \right) = \\ &= 2 \left[\frac{2}{3a} (ax + 2a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2a}^a - \left(\frac{x+a}{2} \sqrt{x^2 + 2ax} \right) \Big|_0^a + \\ &= \frac{a^2}{2} \ln(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}) \Big|_0^a = 2a^2 \sqrt{3} + a^2 \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

2-й способ. Однако проще было в данной задаче сразу рассмотреть фигуру как стандартную относительно оси Oy :

$$F = \left\{ (x; y) \mid -a\sqrt{3} \leq y \leq a\sqrt{3}; \frac{y^2 - 2a^2}{a} \leq x \leq -a + \sqrt{y^2 + a^2} \right\}.$$

Снова используя симметрию, получаем

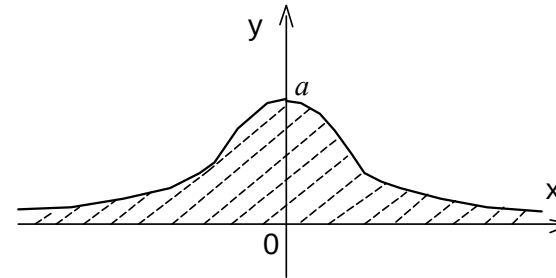
$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{a\sqrt{3}} \left(\sqrt{y^2 + a^2} - a - \frac{y^2}{a} + 2a \right) dy = 2a^2 \sqrt{3} + \\ &+ \left(y\sqrt{y^2 + a^2} + a^2 \ln|y + \sqrt{y^2 + a^2}| - \frac{2y^3}{3a} \right) \Big|_0^{a\sqrt{3}} = \\ &= 2a^2 \sqrt{3} + a^2 \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим примеры на вычисление площадей неограниченных плоских фигур.

Пример 5. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad y = 0 \quad (a > 0).$$

Решение. Данная фигура является неограниченной, и поэтому её нельзя считать квадратуемой в классическом смысле.



Однако на каждом конечном промежутке вида $[-A, A]$, где $A > 0$ – любое действительное число, фигура квадратуема, и её площадь $S(A)$ может быть вычислена как определённый собственный интеграл

$$S(A) = \int_{-A}^A y(x) dx = 2 \int_0^A y(x) dx = 2a^3 \int_0^A \frac{dx}{a^2 + x^2} = 2a^2 \operatorname{arctg} \frac{A}{a}.$$

Тогда

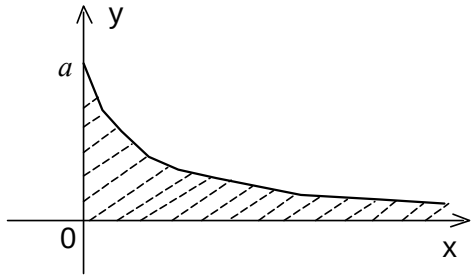
$$S = \lim_{A \rightarrow +\infty} S(A) = \pi a^2 \text{ (кв.ед)}.$$

(в данном случае площадь неограниченной фигуры понимается в смысле главного значения несобственного интеграла 1-го рода; фигура квадратуема, так как данный интеграл сходится).

Пример 6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \text{ (трактриса) и } y = 0 \text{ (} a > 0 \text{)}.$$

Решение. Заметим, что $0 < y \leq a$, причём при возрастании x от 0 до $+\infty$ значение y убывает от a до 0.



Поскольку данная фигура не ограничена, то она не квадратуема в обычном понимании. Покажем, что, тем не менее, её площадь (под ней понимаем значение несобственного интеграла 1-го рода

$$S = \int_0^{+\infty} y(x) dx)$$

конечна. Перейдём под знаком интеграла к переменной интегрирования y .

Так как $dx = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy$, то, принимая во внимание, что положительному приращению x соответствует отрицательное приращение y , приходим к интегралу

$$S = -\int_a^0 \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} y dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy.$$

Сделав тригонометрическую подстановку $y = a \sin t$, $0 < t \leq \pi/2$, окончательно получим

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} d(a \sin t) = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв.ед)}.$$

Пример 7. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^{-x} |\sin x| \text{ и } y = 0 \text{ (} x \geq 0 \text{)}.$$

Решение. И в этом примере имеем ситуацию с неограниченной фигурой, обладающей конечной площадью. Найдём эту площадь по формуле

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} e^{-x} |\sin x| dx.$$

Полагая в каждом интеграле $t = x - \pi n$, получим

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n} \int_0^{\pi} e^{-t} |\sin t| dx = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dx = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n} \frac{e^{-t} (\sin t + \cos t)}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n} = \\ &= \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2 \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right)} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

5.4.2. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана параметрически

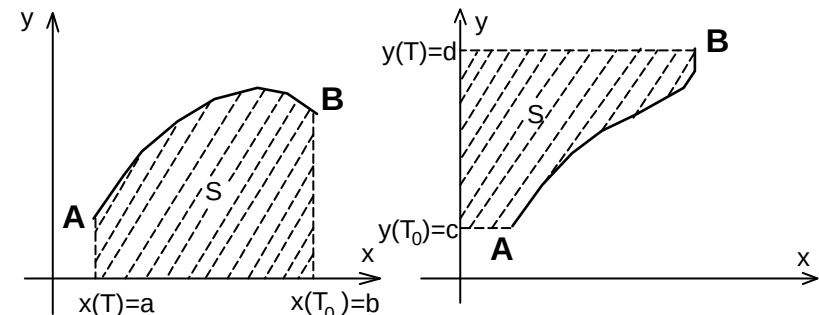
Формулы (1) и (1') могут быть использованы и в том случае, когда кривая, ограничивающая фигуру, задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T],$$

где функции $x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t), y'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$. Для этого достаточно в соответствующих интегралах от x (или от y) перейти к переменной интегрирования t .

1. Случай незамкнутой кривой.

Пусть криволинейная трапеция прилегает к оси Ox , и, когда параметр t пробегает сегмент $[T_0, T]$ от T_0 до T , соответствующая точка $(x(t), y(t))$ движется по кривой так, что трапеция остаётся при этом слева (т.е. от B к A , см. рисунок внизу, слева).



В этом случае $dx(t) = x'(t)dt$, $a = x(T)$, $b = x(T_0)$, и из (1) получаем:

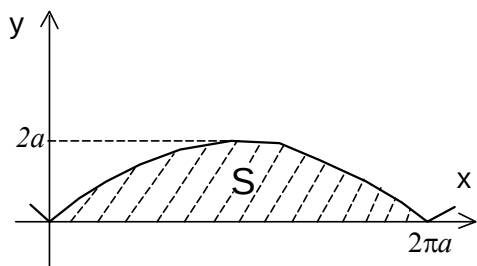
$$S = - \int_{T_0}^T y(t)x'(t)dt. \quad (3)$$

Пусть теперь криволинейная трапеция прилегает к оси Oy , и при изменении значений параметра t от T_0 до T точка $(x(t); y(t))$ движется по кривой так, что трапеция по-прежнему остаётся слева (см. рисунок вверху, справа). В этом случае $dy(t) = y'(t)dt$, $c = y(T_0)$, $d = y(T)$, и из (1') получаем:

$$S = \int_{T_0}^T x(t)y'(t)dt. \quad (4)$$

Пример 8. Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Воспользуемся формулой (3). Поскольку $x'(t) = a(1 - \cos t)$, то получим



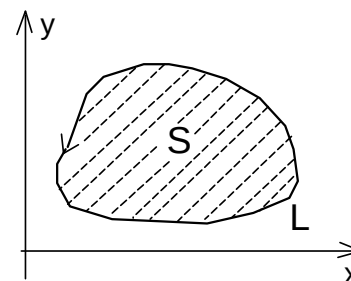
$$S = - \int_{2\pi}^0 y(t)x'(t)dt = \\ = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right) dt = \\ = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \quad (\text{кв.ед}).$$

2. Случай замкнутой кривой.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, есть параметрические уравнения

непрерывной и кусочно-гладкой⁷ простой замкнутой ($x(T_0) = x(T)$, $y(T_0) = y(T)$) кривой L , пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру площади S (такое направление обхода контура называется *положительным*).



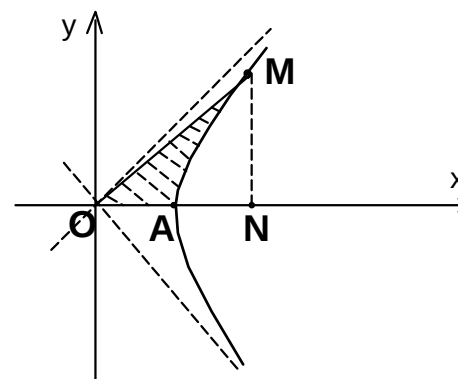
Тогда площадь S может быть вычислена как при помощи формул (3)–(4):

$$S = - \int_{T_0}^T y(t)x'(t)dt, \quad S = \int_{T_0}^T x(t)y'(t)dt,$$

так и при помощи формулы симметричного вида, полученной их сложением:

$$S = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt. \quad (5)$$

Пример 9. Точка M лежит на кривой $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ ($a > 0$). Вычислить площадь гиперболического сектора, ограниченного данной кривой, осью абсцисс и отрезком OM .



Решение. Выясним, какая линия определяется данными параметрическими уравнениями при $a > 0$. Для этого исключим из этих уравнений величину t : так как $x^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 t$ и $y^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 t$, то $x^2 - y^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) = a^2$, или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

⁷ Кривую, заданную уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, назовём *кусочно-гладкой*, если функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны на $[T_0, T]$ (за исключением, быть может, конечного числа точек, где они имеют разрывы первого рода) и имеют всюду на этом сегменте непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$ (за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых эти производные имеют конечные односторонние предельные значения).

Таким образом, кривая удовлетворяет уравнению равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат прямые $y = \pm x$. А именно, данная кривая является правой ветвью этой гиперболы, поскольку при $a > 0$ $x = a \operatorname{ch} t > 0$ при любом t .

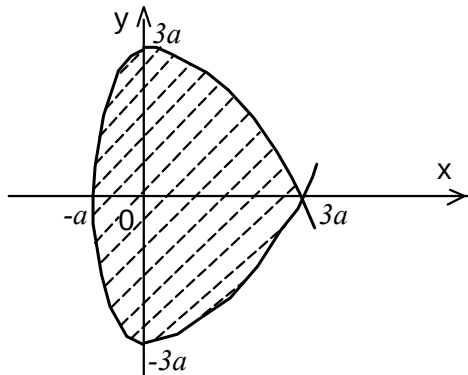
При условии, что точка M имеет координаты $(x; y)$, получаем (см. рис.):

$$S = S_{ONM} - S_{ANM} = \frac{1}{2} xy - \int_a^x y dx.$$

Так как $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, то $dx = a \operatorname{sh} t dt$, откуда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - a^2 \int_0^t \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{a^2}{2} \int_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1) dt = \\ &= \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t + \frac{a^2}{2} t = \frac{a^2 t}{2} \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой $x = a(t^2 - 2t)$, $y = a(t^2 - 1)(t - 3)$ ($a > 0$).



Решение. Заметим, что $x(-1) = x(3) = 3a$ и $y(-1) = y(3) = 0$. В данном случае это означает, что кривая делает петлю при изменении параметра t от -1 до 3 .

Вычислить площадь петли можно любым из трёх следующих способов.

1) По формуле (3) имеем:

$$\begin{aligned} S &= - \int_{T_0}^T y(t) x'(t) dt = - \int_{-1}^3 (a(t^2 - 1)(t - 3)) (a(2t - 2)) dt = \\ &= -2a^2 \int_{-1}^3 (t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t - 3) dt = \\ &= -2a^2 \left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{2}{3} t^3 + 2t^2 - 3t \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{17}{15} a^2 \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

2) По формуле (4) имеем:

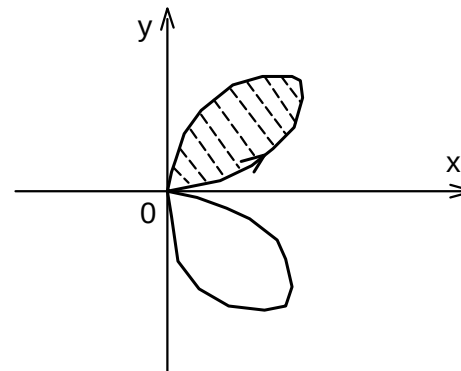
$$\begin{aligned} S &= \int_{T_0}^T x(t) y'(t) dt = \int_{-1}^3 (a(t^2 - 2t)) (a(3t^2 - 6t - 1)) dt = \\ &= a^2 \int_{-1}^3 (3t^4 - 12t^3 + 11t^2 + 2t) dt = \\ &= a^2 \left(\frac{3t^5}{5} - 3t^4 + \frac{11}{3} t^3 + t^2 \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{17}{15} a^2 \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

3) Наконец, по формуле (5) имеем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{T_0}^T (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 (a(t^2 - 2t)(a(3t^2 - 6t - 1)) - a((t^2 - 1)(t - 3))(a(2t - 2))) dt = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_{-1}^3 (t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 6t + 6) dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{7}{3} t^3 - 3t^2 + 6t \right) \Big|_{-1}^3 = \\ &= \frac{17}{15} a^2 \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

В следующем примере при вычислении площади ограниченной плоской фигуры возникает сходящийся несобственный интеграл.

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x = at^2/(1+t^4)$, $y = at^3/(1+t^4)$ ($a > 0$).



Решение. Заметим, что так как при замене t на $(-t)$ значение $x(t)$ не изменяется, а значение $y(t)$ меняет знак, то кривая одновременно содержит точки $(x; y)$ и $(x; -y)$, т.е. симметрична относительно оси абсцисс.

Обратим внимание также на то, что $x(0) = x(+\infty) = 0$.

Это означает, что данная кривая образует петлю при изменении параметра t от 0 до $+\infty$. Итак, кривая образует две симметричные относительно оси Ox петли. Верхняя из них проходит в положительном направлении (фигура остаётся слева) при изменении t от 0 до $+\infty$.

В данном случае наиболее простые вычисления будут, если использовать симметричную формулу (5). При этом так как $y = tx$, то $xy' - yx' = x(x + tx') - tx \cdot x' = x^2$, откуда приходим к несобственному интегралу 1-го рода

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{at^2}{1+t^4} \right)^2 dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{t^3 dt}{(1+t^4)^2}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\frac{S}{2} = \frac{a^2}{2} \left(-t \cdot \frac{1}{4(1+t^4)} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{4(1+t^4)} = \frac{\pi a^2}{16\sqrt{2}},$$

так как

$$\int \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\arctg(x\sqrt{2} + 1) + \arctg(x\sqrt{2} - 1)) + C.$$

Следовательно, площадь S всей фигуры равна $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ (кв.ед).

5.4.3. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0$$

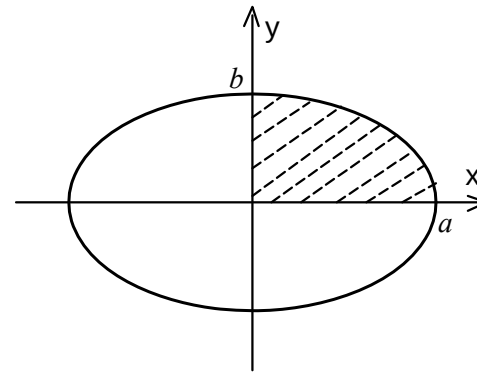
1. В некоторых случаях в такой ситуации удастся разрешить уравнение относительно одной из переменных, придя, таким образом, к случаю *явного задания* кривой, являющейся границей фигуры.

Рассмотрим вначале простой пример.

Пример 12. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Пользуясь симметрией эллипса относительно обеих координатных осей, вычислим четвертую часть искомой площади. Для этого, учитывая, что $a > 0, b > 0$, выразим явно из данного уравнения y через x в первой четверти:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \in [0, a],$$



и, производя в интеграле замену $x = a \sin t$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{ab}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}. \text{ Отсюда } S = \pi ab \text{ (кв.ед).}$$

Пример 13. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \text{ (циссида) и } x = 2a.$$

Решение. Найдём, при каких x кривая определена: $\frac{x^3}{2a - x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$0 \leq x < 2a$. Кривая симметрична относительно оси Ox и не ограничена в левой окрестности точки $x = 2a$. Поэтому площадь фигуры выражается с помощью несобственного интеграла второго рода

$$S = 2 \int_0^{2a} \frac{x^{3/2} dx}{\sqrt{2a - x}}.$$

Замена $x = 2a \sin^2 t$, $0 \leq t < \pi/2$, приводит к обычному интегралу Римана

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2a \sin^2 t)^{3/2} d(2a \sin^2 t)}{\sqrt{2a(1 - \sin^2 t)}} = 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt =$$

$$= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt = 3\pi a^2 \text{ (кв.ед)}.$$

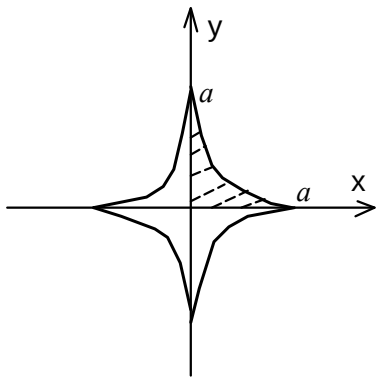
2. В других случаях кривая допускает параметризацию (с последующим применением формул (3)–(5)).

Например, в ситуации с эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ для вычисления четверти его площади можно воспользоваться параметрическими уравнениями $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t (-a \sin t)dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)dt = \frac{\pi ab}{4} \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

Пример 14. Найти площадь фигуры, ограниченной астройдой

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$



Решение.

Воспользуемся параметрическими уравнениями астрыды

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$$

и по формуле (5) получаем, что

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t) dt = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{16} a^2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \pi a^2 \text{ (кв.ед)}.$$

Замечание. Так как астроида симметрична относительно обеих координатных осей, то можно было вычислять четвертую часть искомой площади:

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t) dt \text{ (кв.ед)}.$$

Отметим также, что использование симметричной формулы (5) привело в этой задаче к более простому интегралу, чем тот, который получился бы в результате применения формул (3) или (4).

Пример 15. Приведя уравнение к параметрическому виду, найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x^4 + y^4 = ax^2 y$.

Решение. Положим $y = tx$, тогда $x = \frac{at}{1+t^4}$, $y = \frac{at^2}{1+t^4}$ ($y \geq 0$). Пло-

ская фигура ограничена двумя симметричными относительно оси Oy петлями; x и y обращаются в нуль одновременно при $t = 0$ и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Искомая площадь равна удвоенной площади фигуры, ограниченной одной из петель:

$$S = \int_0^{+\infty} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt = a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt.$$

Применяя подстановку $y = \frac{1}{z}$, можно доказать равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^m dy}{(1+y^4)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{4n-m-2} dy}{(1+y^4)^n}, \quad n \geq 1, m \geq 0. \quad (*)$$

Применяя это равенство и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^4)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t^4 dt}{(1+t^4)^2} = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} t d\left(\frac{1}{1+t^4}\right) = -\frac{t}{4(1+t^4)} \Big|_0^{+\infty} + \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}. \end{aligned}$$

Поскольку, в силу (*),

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}, \text{ то } I = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{8} F(t) \Big|_0^{+\infty},$$

где $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t^2 - 1}{t\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} t$ ($t \neq 0$), $F(0) = 0$.

Окончательно находим $I = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$, $S = \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ (кв.ед).

3. Иногда в случаях, когда кривая задана неявно уравнением $F(x; y) = 0$, имеет смысл перейти к полярным координатам (с последующим применением формулы (6), см. следующий раздел 5.5)

Пример 16. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Решение. Эта кривая называется лемнискатой Бернулли. Составим её уравнение в полярных координатах. Для этого воспользуемся формулами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Подставим в уравнение и получим

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi), \text{ или } r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Продолжение решения рассмотрено в примере 26 следующего раздела.

5.5. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

В полярной системе координат, как и в декартовой, кривые, ограничивающие плоскую фигуру, могут быть заданы параметрически уравнениями

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \text{ где } t \in \{t\},$$

в частности, явным образом уравнением

$$r = r(\varphi) \text{ (или } \varphi = \varphi(r)),$$

а также неявно уравнением

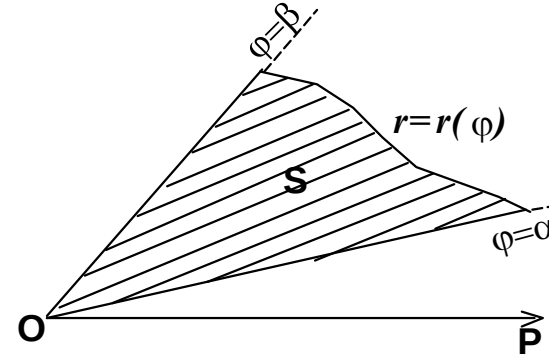
$$F(r, \varphi) = 0,$$

не разрешённым относительно ни одной из переменных.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

5.5.1. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана явно

1. Пусть плоская кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, разрешённым относительно r (т.е. зависимость r от φ задана явным образом), где $\varphi \in [\alpha, \beta]$, причём функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на этом сегменте.



Назовём *криволинейным сектором* плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β :

$$F = \{(r; \varphi) \mid 0 \leq r \leq r(\varphi); \alpha \leq \varphi \leq \beta\}^8.$$

Теорема 1. Криволинейный сектор представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле

$$S(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Доказательство. Так как функция $r(\varphi)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, то функция $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ интегрируема на этом сегменте. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T = \{\varphi_0; \varphi_1; \dots; \varphi_n\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$, где $S(T)$, $s(T)$ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$, отвечающие разбиению T .

⁸ В этом случае будем говорить, что фигура F задана стандартно относительно полярного радиуса r .

Рассмотрим квадратируемые фигуры P и Q , состоящие из круговых секторов раствора $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ с радиусами $r_k = \inf_{\varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k} r(\varphi)$ и $R_k = \sup_{\varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k} r(\varphi)$, $k = 1, \dots, n$, соответственно. Тогда очевидно, что $P \subset F \subset Q$, причём

$$S(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta \varphi_k = s(T), \quad S(Q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k^2 \Delta \varphi_k = S(T)$$

Значит, $S(Q) - S(P) < \varepsilon$, т.е. фигура F квадратуема (лемма 2 раздела 5.3). С другой стороны, так как

$$s(T) \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \leq S(T) \text{ и } S(P) \leq S(F) \leq S(Q),$$

то получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено:

$$\left| S(F) - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \right| < \varepsilon.$$

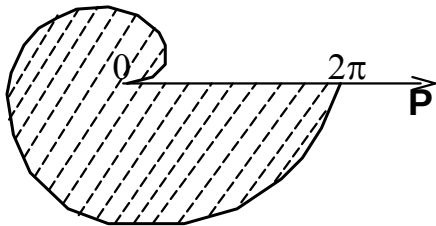
Значит, $S(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$. Теорема доказана.

Следствие. Площадь криволинейного сектора, ограниченного на плоскости кривыми $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ ($0 \leq r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$) и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, т.е.

$$F = \{(r; \varphi) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta; r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi. \quad (6')$$



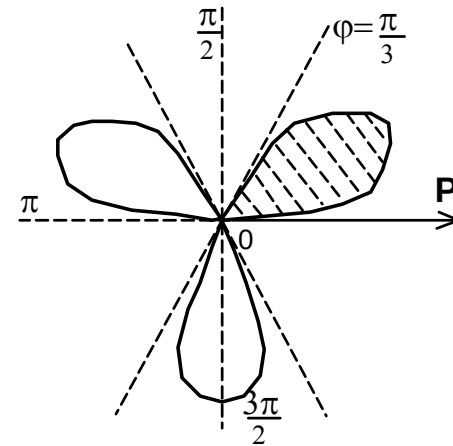
Пример 17. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r = \varphi$.

Решение. Имеем по формуле (6):

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{6} \varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \text{ (кв.ед.)}.$$

Замечание. Можно показать, что площади фигур, заключённых между последовательными витками архимедовой спирали, составляют арифметическую прогрессию с разностью $8\pi^3 a^2$.

Пример 18. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной трилистником $r = a \sin 3\varphi$ ($a > 0$).



Решение. Во-первых, данная функция периодична с периодом $2\pi/3$. Рассмотрим промежуток (длиной в один период) $0 \leq \varphi < 2\pi/3$, и построим на нём кривую. Учитывая область определения этой функции, получим

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi < 2\pi/3 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi/3,$$

причём $r(0) = r(\pi/3) = 0$ (т.е. кривая делает петлю при изменении величины полярного угла φ от 0 до $\pi/3$). Один «лепесток» трилистника построен. Его можно описать как криволинейный сектор

$$F = \{(r; \varphi) \mid 0 \leq r \leq a \sin 3\varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi/3\}.$$

В силу периодичности имеем полную кривую, образующую три симметричные петли (см. рис. выше).

По формуле (6) вычислим площадь одного «лепестка»:

$$\frac{S}{3} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (a \sin 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \frac{\pi a^2}{12},$$

откуда

$$S = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв.ед.)}.$$

Задача решена.

Пример 19. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной улиткой

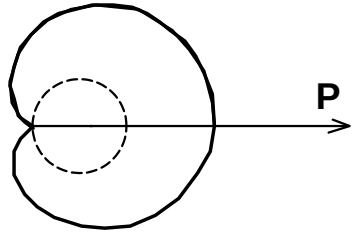
$$r = a \cos \varphi + b \text{ при } 0 < b \leq a.$$

Решение. По формуле (6) имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \varphi + b)^2 d\varphi = \\ = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} a^2 + b^2 \right) \varphi + \frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi + 2ab \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} (a^2 + 2b^2).$$

В частности, площадь кардиоиды (см. рис.) $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$, равна

$$\frac{3}{2} \pi a^2 \text{ (кв.ед.)}.$$



Замечание. Учитывая симметрию улитки относительно полярной оси, площадь фигуры, ограниченной ею, можно было вычислить следующим образом:

$$S = \int_0^{\pi} (a \cos \varphi + b)^2 d\varphi.$$

Пример 20. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$r = \frac{1}{\varphi} \text{ и } r = \frac{1}{\sin \varphi}, \quad 0 < \varphi \leq \pi/2.$$

Решение. Заметим, что на указанном промежутке

$$r_2(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi} > \frac{1}{\varphi} = r_1(\varphi).$$

Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (6'):

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{\varphi^2} \right) d\varphi.$$

Вычислим данный несобственный интеграл 2-го рода (в окрестности $\varphi = 0$ подынтегральная функция не ограничена) по определению:

$$S = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{\varphi^2} \right) d\varphi = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\operatorname{ctg} \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Приводя выражение под знаком предела к виду единой дроби, и применяя разложения для $\sin \varepsilon$ и $\cos \varepsilon$ по формуле Маклорена, получим

$$S = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\varepsilon \cos \varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon \sin \varepsilon} \right) = \\ = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2} - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} + o(\varepsilon^5)}{\varepsilon^2 + o(\varepsilon^4)} \right) = \frac{1}{\pi} \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 21. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$r = a \cos \varphi, \quad r = a(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Решение. Легко убедиться (например, переходя к прямоугольным координатам) в том, что оба уравнения задают окружности (см. рис.).

Определим секторы по φ , в которых расположены эти окружности (это потребуется для нахождения пределов интегрирования).

Для этого найдём область определения обеих функций:

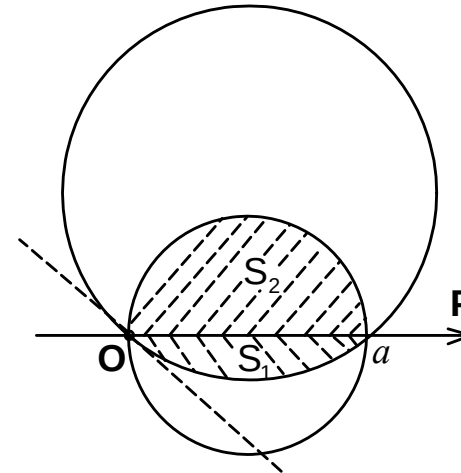
$$a \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

$$a(\cos \varphi + \sin \varphi) \geq 0 \Rightarrow -\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4.$$

По условию, требуется найти $S = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi a^2}{8},$$

$$S_2 = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^0 (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^0 (1 + \sin 2\varphi) d\varphi =$$



$$= \frac{a^2}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}.$$

Поэтому

$$S = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} (\pi - 1) \text{ (кв.ед.)}.$$

2. Пусть теперь плоская кривая L задана в полярной системе координат уравнением $\varphi = \varphi(r)$, разрешённым относительно φ , где функция $\varphi(r)$ определена и непрерывно дифференцируема на сегменте с концами в точках $r = \rho_1$ и $r = \rho_2$, причём при изменении r от ρ_1 до ρ_2 точка с координатами $(r; \varphi)$ движется вдоль кривой L так, что фигура F остаётся слева:

$$F = \{(r; \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \varphi(r); \min(\rho_1; \rho_2) \leq r \leq \max(\rho_1; \rho_2)\}^9.$$

Тогда, переходя под знаком интеграла в формуле (6) к переменной интегрирования r , приходим к формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} r^2 \cdot \varphi'(r) dr. \quad (7)$$

Замечание. На практике для ускорения процесса решения задачи с помощью формулы (7) можно, вообще говоря, не выяснять, слева или справа от траектории движения точки $(r; \varphi)$ вдоль кривой остаётся вычисляемая площадь, а просто воспользоваться модулем:

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_{\min(\rho_1; \rho_2)}^{\max(\rho_1; \rho_2)} r^2 \cdot \varphi'(r) dr \right|.$$

Пример 22. Найти площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\varphi = r \cdot \arctgr$ и двумя лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/\sqrt{3}$.

Решение. Определяем, что изменению φ от нуля до $\pi/\sqrt{3}$ отвечает изменение r от нуля до $\sqrt{3}$. Тогда по формуле (7) имеем

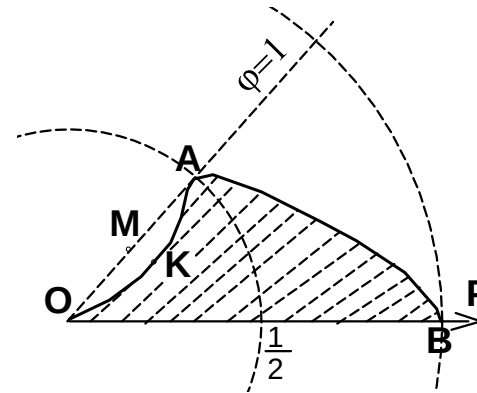
$$S = \frac{1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} r^2 \cdot \varphi'(r) dr = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \left(\arctgr + \frac{r}{1+r^2} \right) dr =$$

⁹ В этом случае будем говорить, что фигура F задана стандартно относительно полярного угла φ .

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{r^3}{3} \arctgr + \frac{r^2}{3} - \frac{1}{3} \ln(1+r^2) \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{3} \ln 2 \right) \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 23. Найти площадь криволинейного сектора, ограниченного кривыми $\varphi = \sin(\pi r)$ ($0 \leq r \leq 1$), $\varphi = 0$.

Решение. Заметим, что при изменении r от 1 до 0 кривая BAO проходится так, что фигура, площадь которой необходимо вычислить, остаётся слева. Поэтому по формуле (7), интегрируя по частям, находим:



$$S = \frac{1}{2} \int_1^0 r^2 (\sin \pi r)' dr =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_0^1 r^2 \cos(\pi r) dr =$$

$$= - \left(\frac{r^2}{2} \sin \pi r + \frac{r}{\pi} \cos \pi r - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi r \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi} \text{ (кв.ед.)}.$$

Замечание. В данном примере функция $\varphi = \sin(\pi r)$ не является монотонной на всём сегменте $[0, 1]$. При этом, когда r возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$, то значение φ возрастает от 0 до 1, а при дальнейшем возрастании r от $\frac{1}{2}$ до

1 значение φ убывает от 1 до 0. Интеграл $\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} r^2 \cos(\pi r) dr$ численно равен площади S_{OKAMO} криволинейного сектора $OKAMO$ (см. рис.). Интеграл $\frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \cos(\pi r) dr$, взятый со знаком минус, численно равен площади S_{OMABO} криволинейного сектора $OMABO$. Соответственно, интеграл

$\frac{\pi}{2} \int_0^1 r^2 \cos(\pi r) dr$ равен искомой площади криволинейного сектора $ОКАВО$, взятой со знаком минус.

Пример 24. Найти площадь криволинейного сектора, ограниченного кривыми $\varphi = 4r - r^3$, $\varphi = 0$.

Решение. Как и в предыдущем примере, функция $\varphi = 4r - r^3$ не является монотонной на сегменте $0 \leq r \leq 2$. Сначала при возрастании r значение φ возрастает от 0 до своего наибольшего значения, а затем при дальнейшем возрастании r — убывает опять до 0.

Поэтому искомая площадь численно равна интегралу

$$S = -\frac{1}{2} \int_0^2 r^2 (4 - 3r^2) dr = \frac{1}{2} \left(\frac{3r^5}{5} - \frac{4r^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 \frac{4}{15} \text{ (кв.ед.)}.$$

5.5.2. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана параметрически уравнениями $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

Пусть функции $r(t)$, $\varphi(t)$ непрерывны на некотором сегменте с концами в точках T_0 и T , причём функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на указанном сегменте. Пусть при изменении параметра t от T_0 до T точка $(r(t); \varphi(t))$ движется вдоль кривой так, что фигура, площадь которой требуется вычислить, остаётся слева. Тогда, переходя под знаком интеграла в формуле (6) к интегрированию по параметру t , приходим к формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T r^2(t) \varphi'(t) dt. \quad (8)$$

Пример 25. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной замкнутой кривой $r = \frac{2at}{1+t^2}$, $\varphi = \frac{\pi t}{1+t}$ ($a > 0$).

Решение. Найдём пределы интегрирования. Так как всегда $r \geq 0$, то $t \geq 0$; при этом $r = 0$, если $t = 0$ и $r \rightarrow 0$, если $t \rightarrow +\infty$. Поэтому по формуле (8) имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2at}{1+t^2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{(1+t)^2} \right) dt = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2 (1+t)^2} dt.$$

Интегрируя с использованием метода Остроградского, получаем

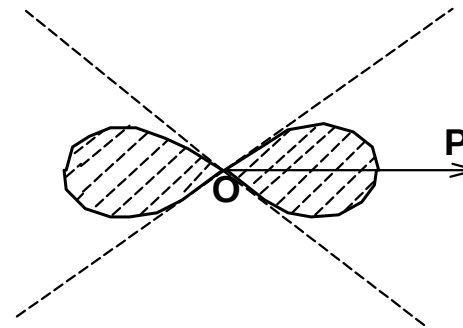
$$S = 2\pi a^2 \left(-\frac{t^2 + t + 2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctgt} t \right) \Big|_0^{+\infty} = \pi a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ (кв.ед.)}.$$

5.5.3. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана неявно уравнением $F(r, \varphi) = 0$

1. В некоторых случаях из неявного уравнения удаётся выразить явно одну переменную через другую. Например, в следующих двух задачах явно выражается r^2 .

Пример 26. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$



Решение. Найдём область определения относительно φ для данной кривой; она задаётся неравенством $2a^2 \cos 2\varphi \geq 0$. Решая это неравенство, находим, что кривая определена, например, на сегменте $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$, а в силу периодичности вокруг полюса с периодом π получаем полное изображение кривой (см. рис.). Так как φ входит в уравнение чётным образом (кривая

симметрична относительно полярной оси), то достаточно вычислить площадь четвертой части фигуры, которой отвечает изменение величины угла φ от 0 до $\pi/4$:

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}, \text{ откуда } S = 2a^2 \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 27. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $r^2 + \varphi^2 = 1$.

Решение. Чтобы задать пределы интегрирования, найдём область допустимых значений φ : $r^2 = 1 - \varphi^2 \geq 0$, откуда $\varphi \in [-1, 1]$. Тогда искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \varphi^2) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

2. Если кривая задана в декартовых координатах, то иногда имеет смысл перейти к *полярным координатам*. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 28. Найти площадь петли декартова листа

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0).$$

Решение. Кривая задана уравнением в декартовых координатах, но для удобства проведения расчётов перейдём к полярным координатам.

Полагая в уравнении кривой $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, после сокращения на r^2 придём к полярному уравнению

$$r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}.$$

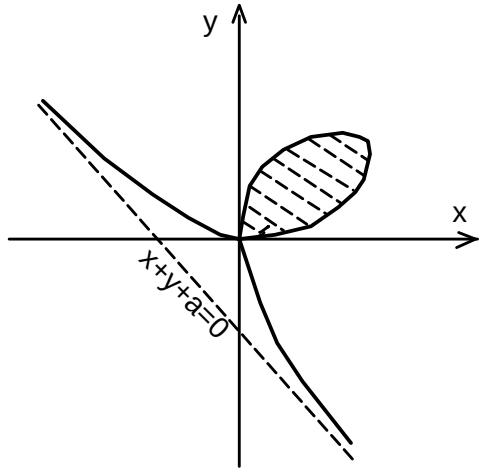
Заметим, что при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ значение полярного радиуса r равно 0, т.е. начало координат – кратная точка кривой (точка самопересечения). Таким

образом определяем, что при изменении величины полярного угла φ от 0 до $\pi/2$ кривая делает петлю, площадь которой и требуется определить. По формуле (6) находим

$$S = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi.$$

Заменяя $\sin \varphi$ на $\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi$, приведём подынтегральное выражение к виду $\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi d(\operatorname{tg} \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2}$, откуда сразу находится первообразная функция

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^3 \varphi} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}.$$



Таким образом,

$$S = -\frac{3a^2}{2} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2}{2} \text{ (кв.ед.)}.$$

Замечание. Декартов лист допускает параметризацию уравнениями

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Сравните способ вычисления площади петли в случае параметрического задания данной кривой с рассмотренным выше.

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к §5

Вычислите площади фигур, ограниченных линиями, заданными явно в прямоугольной декартовой системе координат (значения параметра считать положительными):

1. $y = -x^2$, $y = -2 - x$.
2. $y = 16/x^2$, $y = 17 - x^2$ (1 четверть).
3. $y = a \sin x$, $y = a \cos x$, $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
4. $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \leq y \leq 1$).
5. $y = x^2 e^{-x}$, $y = 0$, $x = 2$.
6. $y = x \ln^2 x$, $y = x \ln x$.
7. $y = \frac{2a}{3} \cos x$, $y = a \operatorname{tg} x$, $x = 0$.
8. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $y = \cos(\pi x) - 1$.
9. $y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2}$, $y = \frac{4a}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{a} \right|$.
10. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y \equiv 0$.

11. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, осью Ox и двумя прямыми, параллельными оси Oy , проведёнными через точки экстремума функции $y(x)$.

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольной системе координат неявно с помощью уравнений:

12. $y^2 = 4x^3$, $y/2 = x^2$.

13. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (1 четверть).

14. $xy = 4\sqrt{2}$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $x = 4$.

15. $y^2 = x^3 - x^4$.

16. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

17. $x^3 = x^2 - y^2$.

18. $a^2 y^4 = x^4(a^2 - x^2)$.

19. $y = x$, $y = -x$, $-y^2 + 2x^2 = 1$.

20. $x^3 = a(x - y)^2$, $y = 0$.

21. $x^2 + 4y^2 = 8a^2$, $x^2 - 3y^2 = a^2$ ($x \geq a$).

22. $y^3 - y = x$, $y = -(1 + x)^2$, $y = 0$.

23. $y^3 - y = x$, $y = -(4 + x)^2$, $y = -1$, $y = 0$.

24. $x = \cos(\pi y)$, $4y^2 = 3(x + 3)$.

25. Найдите площадь каждой из частей, на которые парабола $y^2 = a(a - x)$ разбивает круг $x^2 + y^2 = a^2$.

26. Найдите площадь фигуры, заключённой между параболой $y = x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке $M(2;3)$ и осью Oy .

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически в декартовой системе координат:

27. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.

28. $x = \frac{t}{3}(6 - t)$, $y = \frac{t^2}{8}(6 - t)$.

29. $x = 12 \cos t + 5 \sin t$, $y = 5 \cos t - 12 \sin t$.

30. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = a$, $y \leq 0$ (развёртка круга).

31. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

32. $x = a \sin t$, $y = a \sin 2t$ (кривая Лиссажу).

33. $x = a \cos 3t$, $y = a \sin t$ (кривая Лиссажу).

34. $x = \frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}$, $y = \frac{t\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}$.

35. $x = a \cos t$, $y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}$.

Приведя уравнения к параметрическому виду, найдите площади фигур, ограниченных петлями кривых:

36. $x^3 + y^3 = axy$.

37. $x^4 = axy^2 + ay^3$.

38. $(x + y)^3 = axy$.

39. $x^5 + y^5 = ax^2 y^2$.

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярной системе координат:

40. $r = 3 + 2 \cos \varphi$.

41. $r = 2\varphi$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

42. $r = 4 / \cos(\varphi - \pi/6)$, $\varphi = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$.

43. $r = a \cos \varphi$, $r = 2a \cos \varphi$.

44. $r = \sin^2(\varphi/2)$ (справа от луча $\varphi = \pi/2$).

45. $r = 2 \cos \varphi$, $r = 1$ (вне круга $r = 1$).

46. $r = a \cos 3\varphi$ (трилистник).

47. $r = a \cos 5\varphi$.

48. $r = a \sin 4\varphi$.

49. $r = a(1 - \sin \varphi)$.

50. $r = a(2 - \cos \varphi)$.

51. $r = a \tan \varphi$, $\varphi = \pi/4$.

52. $r^2 = a^2 \cos 4\varphi$.

53. $r = \frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$.

54. $r = a(1 + \sin^2 2\varphi)$, $\varphi = 0$.

55. $\varphi = r - \sin r$, $\varphi = \pi$.

56. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ и находящейся внутри круга $r = a/\sqrt{2}$.

57. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$ и лежащей вне кривой $r = 3a \cos \varphi$.

58. Найдите площадь фигуры, заключённой между внешней и внутренней частями кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

59. Найдите площадь общей части фигур, ограниченных кривыми $r = 3 + \cos 4\varphi$ и $r = 2 - \cos 4\varphi$.

60. Для кривой $r = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ найдите площадь петли и площадь фигуры, заключённой между кривой и её асимптотой.

Перейдя к полярным координатам, найдите площади фигур F , ограниченных кривыми, заданными неявно:

61. $x^4 + y^4 = a^2 xy$.

62. $x^4 + y^4 = a^2 x^2$.

63. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2ay$, $M(a/2; a/2) \in F$.

64. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 2ay$, $M(0; 3a/2) \in F$.

65. $(x^2 + y^2)^3 = ax^4 y$.

66. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2$.

67. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

68. $x^6 + y^6 = a^2(x^4 + y^4)$.

69. $x^6 + y^6 = a^2 x^4$.

70. Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением областей, ограниченных кривыми $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ и $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

71. Найдите площадь фигуры, лежащей между кривыми $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ и $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$.

72. Найдите площадь области, лежащей между кривыми $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ и $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

73. Даны параметрические уравнения эллипса: $x = 2 \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $a = 2, b = 1$ – полуоси. Зная, что $r^2 = x^2 + y^2$, студент вычисляет площадь эллипса так:

$$S = 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{5\pi}{2}.$$

Известно, однако, что $S = \pi ab = 2\pi$. В чём ошибка студента?

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ

6.1. Кривая на плоскости и связанные с ней понятия

Плоской кривой L назовём множество всех точек M плоскости, координаты x и y которых в декартовой прямоугольной системе координат Oxy определяются уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \{t\}, \quad (1)$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны в каждой точке своей области задания $\{t\}$. Аргумент t этих функций, принимающий действительные значения, будем называть *параметром*.¹

В качестве множества $\{t\}$ значений параметра t наряду с сегментами могут выступать конечные и бесконечные интервалы и полуинтервалы. Для определённости в дальнейшем, если не оговорено противное, под $\{t\}$ будем понимать сегмент $[T_0, T]$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *кратной точкой* кривой L , если имеются по крайней мере два значения t_1 и t_2 параметра t , не равные друг другу и такие, что $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$. Например, кривая $x(t) = t(t+1)$, $y(t) = t^2(t-1)$, $t \in R$, имеет кратную точку (точку самопересечения) $(0; 0)$, отвечающую двум различным значениям параметра $t_1 = 0$ и $t_2 = -1$.

Точки кривой L , не являющиеся кратными, называются *простыми* (регулярными) точками этой кривой.

¹ Задание на множестве $\{t\}$ двух скалярных функций $x(t)$, $y(t)$ равносильно заданию вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ одного действительного переменного t , где $\vec{r} = \{x(t), y(t)\}$. При этом равенство $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется *векторным уравнением* кривой.

Кривая L называется *простой* плоской кривой, если различным значениям параметра $t \in [T_0, T]$ соответствуют различные точки $(x; y)$ кривой (т.е. если кривая не имеет кратных точек, за исключением, быть может, конечных точек сегмента $[T_0, T]$ в случае замкнутой кривой).

Точки, отвечающие значениям параметра t из интервала (T_0, T) , называются *внутренними точками* кривой L , а точки, отвечающие граничным значениям T_0 и T параметра t , называются *граничными точками* кривой L . Говорят, что простая плоская кривая L *параметризована* при помощи уравнений (1).

Если значения функций $x(t)$ и $y(t)$ совпадают в конечных точках T_0 и T указанного выше сегмента (и только в них), то простая кривая называется *простой замкнутой* кривой. Простую замкнутую кривую можно было определить иначе.²

Помимо параметрического способа задания уравнениями (1) плоская кривая может быть задана также с помощью одного уравнения $y = y(x)$, разрешённого относительно переменной y (или уравнением $x = x(y)$, разрешённым относительно переменной x). В этих случаях принято считать, что кривая задана *явным образом*.

Наконец, кривую на плоскости можно задать с помощью уравнения с двумя переменными, не разрешённого ни относительно y , ни относительно x :

$$F(x, y) = 0.$$

В этом случае говорят о *неявном* задании кривой.

Рассмотрим примеры простых плоских кривых.

Пример 1. График любой непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $y = f(x)$ представляет собой простую (незамкнутую) кривую; при этом параметризацию кривой вводят по правилу

$$x = t, \quad y = f(t), \quad \text{где } t \in [a, b].$$

Таким образом, явное задание кривой есть частный случай параметрического задания этой кривой.

² Пусть L_1 и L_2 – две простые кривые, причём граничные точки кривой L_1 совпадают с граничными точками кривой L_2 , а любые внутренние точки кривых L_1 и L_2 различны. Кривая L , полученная объединением кривых L_1 и L_2 , называется *простой плоской замкнутой кривой* ([4], стр.392).

Пример 2. Окружность радиуса 1 с центром в начале координат, полученная объединением двух простых кривых – верхней (L_1) и нижней (L_2) полуокружностей, задаваемых соответственно уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0, \pi] \text{ и } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = -\sin t, \end{cases} t \in [\pi, 2\pi],$$

является простой замкнутой кривой. Но та же окружность, заданная уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0, 3\pi],$$

уже не будет простой кривой, так как содержит участок самоналегания, отвечающий значениям $t \in [2\pi, 3\pi]$ и состоящий целиком из кратных точек.

Пример 3. Прямая линия, или просто *прямая*, определяемая на плоскости линейными уравнениями $x = at + b$, $y = ct + d$, где $t \in (-\infty, +\infty)$, относится к простым плоским (неограниченным) кривым.

Всегда можно выбрать постоянные коэффициенты a, b, c, d так, чтобы прямая проходила через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Участок прямой между точками M_1 и M_2 называется *отрезком*, соединяющим эти точки, а совокупность конечного числа примыкающих друг к другу отрезков (так, что начало следующего отрезка совпадает с концом предыдущего, и соседние отрезки не лежат на одной прямой) называется *ломаной линией*, или просто *ломаной*.

Опираясь на понятие простой кривой, введём теперь более общее понятие параметризуемой кривой.

Пусть множество значений параметра $\{t\}$ представляет собой либо сегмент, либо полусегмент, либо интервал, либо числовую прямую, либо открытую или замкнутую полупрямую. Будем говорить, что уравнения (1)

$$x = x(t), y = y(t), \text{ где } t \in \{t\},$$

задают *параметризуемую кривую* L , если существует такая конечная или бесконечная система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, разбивающих множество $\{t\}$, что для значений t из каждого такого сегмента уравнения (1) определяют простую кривую.

Таким образом, параметризуемую кривую можно рассматривать как объединение простых кривых, причём эти простые кривые последовательно пробегаются точкой M , координаты которой определяются уравнениями (1), когда параметр t , монотонно возрастаая, пробегает множество своих значений $\{t\}$.

Замечание 1. Простую кривую можно рассматривать как частный случай параметризуемой кривой. В этом случае система сегментов, разбивающих сегмент $[T_0, T]$, состоит из одного сегмента, а именно из самого сегмента $[T_0, T]$.

Замечание 2. Одна и та же простая кривая L может быть параметризована различными способами.

Например, дугу эллипса, лежащую в первой четверти, можно задать параметрическими уравнениями $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, где $t \in [0, \pi/2]$ ($a > 0, b > 0$). С другой стороны, так как этот эллипс определяется неявным уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то получаем ещё одну параметризацию:

$$x = t, y = b \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}, \text{ где } t \in [0, a].$$

Замечание 3. Параметризуемая кривая может содержать точки самопересечений, самоприкосновений и участки самоналеганий.

Замечание 4. Вместо декартовых прямоугольных координат можно использовать криволинейные координаты, в частности, *полярные координаты*. Все основные определения при этом сохраняют свой смысл.

Замечание 5. Понятие *пространственной кривой* вводится в полной аналогии с понятием плоской кривой.

Пространственная простая кривая – это множество $\{M\}$ точек пространства, координаты x, y, z которых в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ определяются уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \{t\}, \quad (2)$$

где функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны на множестве $\{t\}$, причём разным значениям параметра t отвечают разные точки M .

Аналогично тому, как это делалось на плоскости, вводится понятие *параметризуемой пространственной кривой*.

Кривую в пространстве можно также определять как пересечение двух поверхностей, задаваемых уравнениями

$$F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0.$$

Приведём примеры параметризуемых кривых на плоскости и в пространстве.

Пример 4. Кривая L , задаваемая на плоскости уравнениями

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad \text{где } t \in [0, 3\pi],$$

является по определению параметризуемой кривой. Действительно, сегмент $[0, 3\pi]$ можно разбить, например, на сегменты $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$ так, что для значений t из каждого такого сегмента указанные уравнения определяют простую кривую, а именно полуокружность.

Пример 5. Уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct, \quad \text{где } t \in (-\infty, +\infty),$$

задают простую пространственную кривую, называемую *винтовой линией* (траектория движения точки, вращающейся равномерно вокруг оси z и одновременно движущейся с постоянной скоростью параллельно этой оси).

Пример 6. Система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$
 определяет в про-

странстве замкнутую кривую, носящую название *кривой Вивиани* (кривая, по которой пересекаются сфера и прямой цилиндр, для которого направляющей служит окружность, построенная на радиусе сферы, как на диаметре).

Кривую Вивиани можно представить и параметрически:

$$x = a \sin^2 t, \quad y = a \sin t \cos t, \quad z = a \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

6.2. Спрямяемая кривая и длина её дуги

Введём понятие *длины дуги* параметризуемой кривой и рассмотрим некоторые свойства кривых, имеющих длину дуги (такие кривые принято называть *спрямыми*).

Пусть плоская кривая L параметризуется уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{где } t \in [T_0, T],$$

и $\bar{T}$ – произвольное разбиение сегмента $[T_0, T]$ точками

$$T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T.$$

Разбиению $\bar{T}$ соответствует разбиение кривой L точками $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$, где $M_i(x(t_i), y(t_i))$. Образовавшуюся при этом ломаную $l(\bar{T}) = M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1} M_n$ будем называть *ломаной, вписанной в кривую L* и отвечающей разбиению $\bar{T}$ сегмента $[T_0, T]$. При этом длина $|l_i(\bar{T})|$ звена $l_i(\bar{T}) = M_{i-1} M_i$, $i = \overline{1, n}$, этой ломаной находится по формуле расстояния между двумя точками плоскости:

$$|l_i(\bar{T})| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Поэтому длина $|l(\bar{T})|$ всей ломаной $l(\bar{T})$ равна

$$|l(\bar{T})| = \sum_{i=1}^n |l_i(\bar{T})|.$$

Кривая L называется *спрямяемой* (или *имеющей конечную длину*), если множество $\{l(\bar{T})\}$ длин вписанных в кривую L ломаных $l(\bar{T})$, отвечающих всевозможным разбиениям $\bar{T}$ сегмента $[T_0, T]$, ограничено. При этом точная верхняя грань множества $\{l(\bar{T})\}$ называется *длиной дуги кривой L* и обозначается $|L|$:

$$|L| = \sup_{\bar{T}} \{l(\bar{T})\}.$$

Как следует из определения, для каждой спрямяемой кривой длина её дуги есть неотрицательное действительное число (однозначно определённое). Докажем одно несложное утверждение.

Лемма 1. Пусть ломаная l_0 вписана в кривую L и соответствует разбиению $\bar{T}_0$ сегмента $[T_0, T]$; ломаная l_1 также вписана в кривую L и соответствует разбиению $\bar{T}_1$ того же сегмента, причём $\bar{T}_0 \subseteq \bar{T}_1$. Тогда $|l_0| \leq |l_1|$.

Доказательство. Пусть $l_0 = M_1 \dots M_k M_{k+1} \dots M_n$,

$l_1 = M_1 \dots M_k M' M_{k+1} \dots M_n$. Так как $|M_k M_{k+1}| \leq |M_k M'| + |M' M_{k+1}|$ (неравенство треугольника), то $|l_0| \leq |l_1|$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Существуют неспрямяемые кривые³.

Спрямяемые кривые и их длины обладают следующими свойствами.

1°. (*Инвариантность*). Если кривая L спрямяема, то длина её дуги не зависит от способа параметризации этой кривой.

2°. (*Аддитивность*). Если спрямяемая кривая L разбита при помощи конечного числа точек $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ на конечное число кривых L_i , причём указанные точки соответствуют значениям $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ параметра

³ Пример такой кривой можно найти в книге В.А. Ильина и Э.Г. Позняка «Основы математического анализа», 1 (М., 1982, с.382–386).

t и $T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, то каждая из кривых L_i спрямляема и сумма длин всех кривых L_i равна длине кривой L .

Доказательство. Докажем свойство аддитивности для случая, когда L является объединением двух кривых: L_1 и L_2 . Пусть кривая L задаётся функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$; кривая L_1 : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T']$; кривая L_2 : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T', T]$ (тогда $L = L_1 \cup L_2$). Пусть $\bar{T}_1$ – разбиение сегмента $[T_0, T']$, l_1 – ломаная, соответствующая этому разбиению; $\bar{T}_2$ – разбиение $[T', T]$, ломаная l_2 соответствует $\bar{T}_2$. Тогда $\bar{T} = \bar{T}_1 \cup \bar{T}_2$ – разбиение сегмента $[T_0, T]$; ломаная $l = l_1 \cup l_2$ соответствует разбиению $\bar{T}$. Так как $|l| = |l_1| + |l_2|$, то $|l_1| \leq |l|$, $|l_2| \leq |l|$. Это означает, что длины ломаных, вписанных в кривые L_1 и L_2 , ограничены сверху (например, длиной кривой L). Значит, L_1 и L_2 спрямляемы.

Обозначим через C точку кривой L с координатами $(x(T'); y(T'))$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как кривая L спрямляема, то существует ломаная l , вписанная в кривую L , такая, что $|l| > |L| - \varepsilon$. Добавим к узлам ломаной l точку C и получим ломаную l' . Из леммы 1 следует, что $|l'| \geq |l| > |L| - \varepsilon$. Очевидно, что $l = l_1 \cup l_2$, причём ломаная l_1 вписана в кривую L_1 , l_2 – в L_2 . Значит, $|l_1| + |l_2| = |l'| > |L| - \varepsilon$. Отсюда $|L_1| + |L_2| \geq |l_1| + |l_2| > |L| - \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ – произвольное число, то окончательно получаем:

$$|L_1| + |L_2| \geq |L|. \quad (1)$$

Докажем теперь неравенство с противоположным знаком. Снова выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как кривая L_1 спрямляема, то существует ломаная l_1 , вписанная в кривую L_1 , такая, что $|l_1| > |L_1| - \varepsilon/2$. Аналогично существует ломаная l_2 , вписанная в кривую L_2 , такая, что $|l_2| > |L_2| - \varepsilon/2$. Пусть $l = l_1 \cup l_2$. Тогда ломаная l вписана в кривую L , причём $|l| = |l_1| + |l_2| > |L_1| + |L_2| - \varepsilon$. Значит, $|L| > |L_1| + |L_2| - \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности выбора числа ε получаем:

$$|L_1| + |L_2| \leq |L|. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $|L| = |L_1| + |L_2|$. Свойство аддитивности доказано.

3° . (Существование единицы). Существует дуга единичной длины.

В качестве такой дуги можно рассмотреть отрезок прямой, имеющий длину, равную единице измерения, или дуга окружности единичного радиуса, соответствующая центральному углу величиной в 1 радиан.

Свойство 3° означает, что измерение длины дуги существенным образом зависит от выбора масштабной единицы измерения в системе координат.

Замечание 2. Для простых незамкнутых кривых существует ещё один подход к определению длины дуги [13]. А именно, длиной дуги кривой L называется предел длин $|l(\bar{T})|$ вписанных в неё ломаных (см. выше) при $\Delta t \rightarrow 0$, где $\Delta t = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$. Чтобы это определение было справедливо

и в случае замкнутых ломаных, достаточно в нём вместо стремления к нулю длин всех звеньев ломаной потребовать того же относительно диаметров соответствующих дуг (под диаметром дуги понимается точная верхняя грань расстояний между любыми двумя точками дуги).

Замечание 3. Понятие длины дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями, вводится аналогично понятию длины дуги плоской кривой. Пространственные спрямляемые кривые обладают свойствами 1° и 2° , приведёнными выше для плоских кривых.

6.3. Основные классы спрямляемых кривых. Вычисление длины дуги

Следующие теоремы описывают большую часть существующих видов спрямляемых кривых.

6.3.1. Случай параметрического задания кривой в декартовых координатах

Теорема 1 (1-е достаточное условие спрямляемости плоской кривой и длина дуги в прямоугольных координатах). Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные $x'(t)$ и $y'(t)$ на сег-

менте $[T_0, T]$.⁴ Тогда кривая L , определяемая параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, спрямляема, и длина её дуги может быть вычислена по формуле

$$|L| = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (1)$$

Замечание. Подынтегральное выражение $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ называется при этом *дифференциалом дуги* и обозначается dL . Для плоских спрямляемых кривых справедливо равенство

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

где $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $y'(t)$ непрерывна на сегменте $[T_0, T]$, то она равномерно непрерывна на нём. Значит, существует число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $t', t'' \in [T_0, T]$, $|t' - t''| < \delta_1$, выполнено:

$$|y'(t') - y'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(T - T_0)}.$$

Обозначим $f(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Так как по условию теоремы функция $f(t)$ непрерывна на сегменте $[T_0, T]$, то она интегрируема на этом сегменте и существует число $A = \int_{T_0}^T f(t)dt$. Тогда, по определению интегрируемости функции, найдётся число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V сегмента $[T_0, T]$, $\Delta_V < \delta_2$, имеет место неравенство $|\sigma(V) - A| < \frac{\varepsilon}{4}$ (здесь $\sigma(V)$ – интегральная сумма для функции $f(t)$, соответствующая разбиению V).

⁴ В этом случае говорят, что функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на сегменте $[T_0, T]$ и обозначают $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; $\bar{T} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[T_0, T]$, $\Delta_{\bar{T}} < \delta$. Пусть l – ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению $\bar{T}$. Тогда

$$\begin{aligned} |l| &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ (мы применили теорему Лагранжа к функциям $x(t)$ и $y(t)$ на сегментах $[t_{k-1}, t_k]$).

Значит,

$$\begin{aligned} |l| &\leq \sqrt{\sup_{T_0 \leq t \leq T} (x'(t))^2 + \sup_{T_0 \leq t \leq T} (y'(t))^2} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \\ &= \sqrt{\sup_{T_0 \leq t \leq T} (x'(t))^2 + \sup_{T_0 \leq t \leq T} (y'(t))^2} \cdot (T - T_0). \end{aligned}$$

Мы доказали, что длины всех ломаных, вписанных в кривую L , ограничены сверху. Это означает, что кривая L спрямляема.

Перейдём к доказательству формулы для вычисления длины кривой. Докажем вначале одно вспомогательное алгебраическое неравенство.

Лемма 1. Для любых действительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|. \quad (3)$$

Доказательство. Если $b^2 + c^2 = 0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $b^2 + c^2 \neq 0$. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| &= \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} \leq \frac{|b - c| \cdot |b + c|}{\sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}} \leq \\ &\leq \frac{|b - c| \cdot (|b| + |c|)}{|b| + |c|} = |b - c|. \text{ Лемма 1 доказана.} \end{aligned}$$

Согласно неравенству (3), теперь имеем

$$\left| \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \right| \leq$$

$$\leq |y'(\eta_k) - y'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{4(T - T_0)},$$

так как $|\eta_k - \xi_k| \leq \Delta t_k < \delta$. Пусть $V = V(\bar{T}) = \{t_0; t_1; \dots; t_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ – размеченное разбиение сегмента $[T_0, T]$, $\Delta_V < \delta$. Значит, $|\sigma(V) - A| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Но $\sigma(V) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k$. Отсюда и из (2) получим, что

$$|\sigma(V) - l| \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{4(T - T_0)} \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{4(T - T_0)} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно,

$$|l - A| \leq |l - \sigma(V)| + |\sigma(V) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

(Заметим, что соотношение (4) доказано нами для произвольной ломаной l , соответствующей разбиению сегмента $[T_0, T]$, диаметр которого меньше δ).

Так как по определению длины кривой $|L| = \sup_{\bar{T}} \{l(\bar{T})\}$, то существует

ломаная l^* , вписанная в кривую L и такая, что $|l^*| > |L| - \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть ломаная

l^* соответствует разбиению $\bar{T}^*$ сегмента $[T_0, T]$. Существует измельчение $\bar{T}'$ разбиения $\bar{T}^*$, удовлетворяющее условию $\Delta_{\bar{T}'} < \delta$. Пусть ломаная l'

соответствует разбиению $\bar{T}'$, тогда $|l'| \geq |l^*| > |L| - \frac{\varepsilon}{2}$ (лемма 1 раздела 6.2)

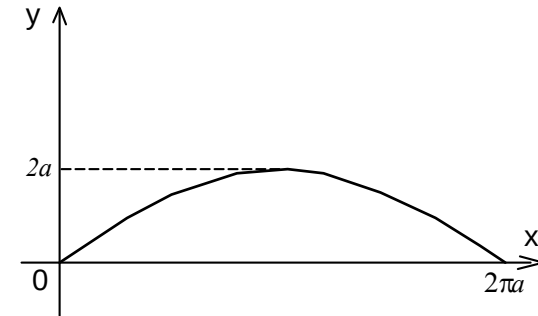
и, согласно неравенству (2), $||l'| - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда заключаем, что

$||L| - A| < \varepsilon$. Но ε – произвольное положительное число, значит, $|L| = A$.

Теорема доказана.

Пример 1. Найти длину дуги, отвечающей одной арке циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Данная кривая имеет вид, изображённый на рисунке. Длину дуги находим по формуле (1):



$$\begin{aligned} |L| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 4a \int_0^{\pi} \sin t dt = 4a(-\cos t) \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

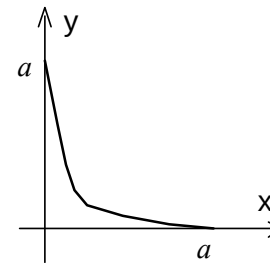
Замечание. Учитывая симметрию кривой относительно прямой $x = \pi a$, можно было вычислять её длину по формуле

$$|L| = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt.$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой $x = a \cos^4 t$, $y = a \sin^4 t$, $a > 0$.

Решение. В данной задаче для нахождения длины дуги можно воспользоваться формулой (1), однако предварительно необходимо определить пределы интегрирования.

Заметим, что при изменении параметра t от 0 до $\pi/2$ точка $(x; y)$ про-



ходит участок кривой от точки $(a; 0)$ до точки $(0; a)$, а затем при увеличении значений параметра от $\pi/2$ до π возвращается обратно (происходит самоналегание). Вся кривая при этом лежит в первой четверти (см. рис.). Поэтому в качестве пределов интегрирования выберем 0 и $\pi/2$.

Поскольку $x'(t) = -4a \cos^3 t \sin t$,

$$y'(t) = 4a \sin^3 t \cos t,$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 16a^2 \cos^6 t \sin^2 t + 16a^2 \sin^6 t \cos^2 t =$$

$$= 2a^2 \sin^2(2t)(1 + \cos^2(2t)),$$

то для длины дуги получаем

$$\begin{aligned} |L| &= a\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 2t} \cdot \sin 2t dt = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + z^2} dz = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}} \left(z\sqrt{1 + z^2} + \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) \right) \Big|_0^1 = a + \frac{a \ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Замечание. В данном случае удаётся выразить явно y через x :

$$y = a \sin^4 t = a(1 - \cos^2 t)^2 = a \left(1 - 2\sqrt{\frac{x}{a} + \frac{x}{a}} \right),$$

однако с точки зрения объёма вычислений рассмотренный выше способ проще.

Теорема 2 (2-е достаточное условие спрямляемости плоской кривой). Если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют на сегменте $[T_0, T]$ ограниченные первые производные, то кривая L , определяемая параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, спрямляема.

Доказательство. Действительно, заметим, что при доказательстве спрямляемости кривой L в теореме 1 мы пользовались только ограниченностью функций $x'(t)$ и $y'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$.

Теорема 3 (3-е достаточное условие спрямляемости плоской кривой). Формула (1) для вычисления длины дуги справедлива также в случае, когда функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны, а производные $x'(t)$ и $y'(t)$ только интегрируемы на сегменте $[T_0, T]$.

Доказательство. Так как любая интегрируемая функция ограничена, то из теоремы 2 следует, что и в условиях нашей теоремы кривая L является спрямляемой.

Установим справедливость формулы (1). Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $f(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ интегрируема на сегменте $[T_0, T]$, то существует число $\delta_1 > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения $V = \{t_0; t_1; \dots; t_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ сегмента $[T_0, T]$,

$$\Delta_V < \delta_1, \text{ выполнено: } |\sigma(V) - A| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ где } A = \int_{T_0}^T f(t) dt.$$

С другой стороны, поскольку функция $y'(t)$ интегрируема на сегменте $[T_0, T]$, то существует число $\delta_2 > 0$ такое, что для любого разбиения сегмента $[T_0, T]$ с диаметром, меньшим δ_2 , разность между верхней и нижней суммами Дарбу $S(T)$ и $s(T)$ для этой функции будет меньше, чем $\frac{\varepsilon}{4}$ (см. доказательство критерия Римана интегрируемости функции в пункте 1.2.5. §1). Пусть $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$; $\bar{T} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ – произвольное разбиение $[T_0, T]$, $\Delta_{\bar{T}} < \delta$. (Тогда $S(\bar{T}) - s(\bar{T}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{4}$, где M_k и m_k – соответственно точная верхняя и нижняя грани функции $y'(t)$ на сегменте $[t_{k-1}, t_k]$).

Пусть l – ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению $\bar{T}$. Тогда

$$\begin{aligned} |l| &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k. \end{aligned}$$

Обозначим через $V' = \{t_0; t_1; \dots; t_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ размеченное разбиение сегмента $[T_0, T]$, построенное по разбиению $\bar{T}$ и точкам ξ_k , $k = 1, \dots, n$. Получим, что

$$\begin{aligned} \|l - \sigma(V')\| &= \left| \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \right) \Delta t_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \right| \Delta t_k \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |y'(\xi_k) - y'(\eta_k)| \Delta t_k \leq S(\bar{T}) - s(\bar{T}) \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались леммой 1, приведённой в доказательстве теоремы 1).

Так как $|\sigma(V') - A| < \frac{\varepsilon}{4}$, $S(\bar{T}) - s(\bar{T}) < \frac{\varepsilon}{4}$, то из последней цепочки соотношений получаем

$$|A - |l|| \leq |\sigma(V') - A| + ||l| - \sigma(V')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы доказали, что в условиях теоремы 3 справедливо неравенство (4), возникшее при доказательстве теоремы 1. Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны рассуждениям в доказательстве теоремы 1. Теорема 3 доказана.

Теорема 4 (4-е достаточное условие спрямляемости плоской кривой). Формула (1) остаётся справедливой и в том случае, если хотя бы одна из функций $x(t)$, $y(t)$ не является непрерывно дифференцируемой на всём сегменте $[T_0, T]$, но при этом непрерывно дифференцируема на сегменте $[T_0, T - \varepsilon]$ при любом ε таком, что $0 < \varepsilon < T - T_0$, а функция $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ имеет непрерывную первообразную на сегменте $[T_0, T]$. В этом случае интеграл понимается как несобственный, т.е.

$$|L| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Доказательство. Докажем, что в условиях теоремы кривая L , заданная уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, является спрямляемой. Пусть l – произвольная ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению $\bar{T} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ сегмента $[T_0, T]$. Обозначим

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно теореме 1, кривая L_ε , заданная уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ на сегменте $[T_0, T - \varepsilon]$, является спрямляемой и её длина $|L_\varepsilon| = \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \leq A$.

Обозначим $\bar{T}' = \{t_0; t_1; \dots; t_{n-1}; T - \varepsilon; t_n\}$ – измельчение разбиения $\bar{T}$, l' – ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению $\bar{T}'$. Ясно, что $|l| \leq |l'|$ (лемма 1 раздела 6.2). С другой стороны, $l' = l_\varepsilon \cup M_{T-\varepsilon}M_T$, где l_ε – ломаная, вписанная в кривую L_ε и соответствующая разбиению $\bar{T}_\varepsilon = \{t_0; t_1; \dots; t_{n-1}; T - \varepsilon\}$; $M_{T-\varepsilon}M_T$ – отрезок на

плоскости, соединяющий точки $M_{T-\varepsilon} = (x(T - \varepsilon); y(T - \varepsilon))$ и $M_T = (x(T); y(T))$. Так как кривая L_ε спрямляема, то длина любой ломаной, вписанной в неё, не превосходит её длины: $|l_\varepsilon| \leq |L_\varepsilon| \leq A$. Длина отрезка $M_{T-\varepsilon}M_T$ ограничена константой M , поскольку отображение отрезка $[T_0, T]$ на плоскость, задаваемое функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, является непрерывным, а значит, ограниченным. Таким образом, $|l| \leq |l'| \leq A + M$.

Поскольку ломаная l была выбрана произвольным образом, то мы доказали, что длины всех ломаных, вписанных в кривую L , ограничены сверху. Это означает, что кривая L спрямляема.

Покажем, что $|L| = A$, т.е. что число A является точной верхней гранью длин ломаных, вписанных в L . Докажем сначала, что оно является верхней гранью, т.е. что $|l| \leq A$ для любой ломаной l , вписанной в L . Пусть существует ломаная l^* , вписанная в кривую L и такая, что $|l^*| > A$. Обозначим

$\delta = \frac{|l^*| - A}{2} > 0$. Очевидно, что в таком случае существует ломаная l_ε^* , вписанная в кривую L_ε при некотором $\varepsilon > 0$, длина которой $|l_\varepsilon^*| \geq |l^*| - \delta$. С

другой стороны, $|l_\varepsilon^*| \leq |L_\varepsilon| \leq A$. Получаем, что $A \geq |l^*| - \delta = \frac{|l^*| + A}{2}$, т.е. $|l^*| \leq A$. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно и $|l| \leq A$ для любой ломаной l , вписанной в кривую L .

Докажем теперь, что число A является точной верхней гранью длин ломаных, вписанных в L . Зафиксируем число $\delta > 0$. Так как

$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, то найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left| A - \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Рассмотрим кривую L_ε , заданную уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ на сегменте $[T_0, T - \varepsilon]$. По определению спрямляемой кривой, найдётся ломаная

l_ε , вписанная в кривую L_ε и соответствующая разбиению $\bar{T}_\varepsilon = \{t_0; t_1; \dots; t_{n-1}; T - \varepsilon\}$ такая, что

$$\|L_\varepsilon - l_\varepsilon\| = \left| \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt - |l_\varepsilon| \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Пусть l – ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению $\bar{T}' = \{t_0; t_1; \dots; t_{n-1}; T - \varepsilon; t_n\}$. Тогда $|l| \geq |l_\varepsilon|$, следовательно,

$$\left| \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt - |l| \right| \leq \left| \int_{T_0}^{T-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt - |l_\varepsilon| \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Значит, для любого числа $\delta > 0$ мы построили ломаную l , вписанную в кривую L и такую, что $|A - |l|| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Так как по уже доказанному $|l| \leq A$ для любой ломаной l , вписанной в кривую L , то это означает, что $A = \sup_l |l|$, т.е. что $A = |L|$. Теорема доказана.

Пример 3. Найти длину дуги полуокружности $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($x \in [-1, 1]$).

Решение. Очевидно, что для полуокружности $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$, $t \in [-1, 1]$, функция $y(t)$ не является дифференцируемой в точках $t = \pm 1$, но в то же время на сегменте $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ эта функция непрерывно дифференцируема для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$. Так как $y'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$ на

$[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1 + (y'(t))^2$, $\sqrt{1 + (y'(t))^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$,

и первообразная функции $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ – функция $\arcsin t$ – непрерывна на $t \in [-1, 1]$, то длину полуокружности вычисляем по формуле (1):

$$|L| = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t \Big|_{-1}^1 = \pi.$$

Теорема 5 (пространственный случай в прямоугольных координатах). Если пространственная параметризуемая кривая L задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$, то эта кривая спрямляема, и длина её дуги может быть вычислена по формуле

$$|L| = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (5)$$

Замечание. При этом дифференциал дуги L связан с дифференциалами функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ при помощи равенства

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

Доказательство. Обозначим $A = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. Пусть функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(x) dx\right)^2} + \dots + \left(\int_a^b f_m(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b \sqrt{f_1^2(x) + \dots + f_m^2(x)} dx.$$

Доказательство леммы. Разделим сегмент $[a, b]$ на n равных частей и положим $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Для соответствующих интегральных сумм имеет место цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n f_1(x_k) \frac{b-a}{n}\right)^2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n f_m(x_k) \frac{b-a}{n}\right)^2 &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n f_j(x_k) \frac{b-a}{n}\right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n f_j(x_k) \frac{b-a}{n}\right) \left(\sum_{l=1}^n f_j(x_l) \frac{b-a}{n}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f_j(x_k) f_j(x_l)\right) \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^m f_j^2(x_k)} \sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2(x_l)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{f_1^2(x_k) + \dots + f_m^2(x_k)} \frac{b-a}{n}\right)^2.$$

Заметим, что неравенство в этой цепочке следует из неравенства Коши–Буняковского (см. лемму 1 пункта 2.3.1 §2). Отсюда предельным переходом получаем требуемое неравенство для интегралов. Лемма 2 доказана.

Пусть теперь $\bar{T} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[T_0, T]$, l – ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению $\bar{T}$. Тогда, учитывая неравенство (6), получаем:

$$|l| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t) dt\right)^2 + \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} y'(t) dt\right)^2 + \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} z'(t) dt\right)^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = A.$$

Мы доказали, что число A является верхней гранью длин всех ломаных l , вписанных в кривую L , т.е. кривая L спрямляема.

Покажем, что число A является точной верхней гранью длин всех ломаных l , вписанных в L . Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функции $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ непрерывны на сегменте $[T_0, T]$, то они равномерно непрерывны на нём. Значит, существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $t', t'' \in [T_0, T]$, $|t' - t''| < \delta$, выполнено:

$$|x'(t') - x'(t'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(T - T_0)}; |y'(t') - y'(t'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(T - T_0)};$$

$$|z'(t') - z'(t'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(T - T_0)}.$$

Пусть $\bar{T} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[T_0, T]$, $\Delta_{\bar{T}} < \delta$; l – ломаная, вписанная в кривую L и соответствующая разбиению

нию $\bar{T}$. Оценим сверху разность $A - |l| \geq 0$. Имеем

$$A - |l| = \int_{T_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt -$$

$$- \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\left(\frac{x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} + \left(\frac{y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} + \left(\frac{z(t_k) - z(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} \right) dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\sqrt{\left(x'(t) - \frac{x(t_k) - x(t_{k-1}))}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \left(y'(t) - \frac{y(t_k) - y(t_{k-1}))}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(z'(t) - \frac{z(t_k) - z(t_{k-1}))}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\sqrt{(x'(t) - x'(\xi_k))^2 + (y'(t) - y'(\zeta_k))^2 + (z'(t) - z'(\eta_k))^2} \right) dt <$$

$$< \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}(T - T_0)} \sqrt{3} dt = \varepsilon.$$

Здесь мы применили числовое неравенство Коши

$$\left| \sqrt{\sum_{j=1}^m a_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2} \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m (a_j - b_j)^2}$$

(см. лемму 2 пункта 2.3.2. §2), а также теорему Лагранжа (точки ξ_k, ζ_k, η_k лежат в интервалах (t_{k-1}, t_k)).

Значит, число A является точной верхней гранью длин ломаных, вписанных в кривую L , т.е. $A = |L|$. Теорема доказана.

Пример 4. Найти длину дуги пространственной кривой $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = \frac{2}{3} t \sqrt{2t}$ от точки $M(0; 0; 0)$ до точки $N\left(0; 2\pi; \frac{8\pi\sqrt{\pi}}{3}\right)$.

Решение. Так как $x'(t) = \sin t + t \cos t$, $y'(t) = \cos t - t \sin t$, $z'(t) = \sqrt{2}t$, то $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = (t+1)^2$. Движению точки от M к N отвечает изменение параметра t от 0 до 2π . Поэтому по формуле (5) находим

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} (t+1) dt = 2\pi^2 + 2\pi.$$

6.3.2. Случай явного задания кривой в декартовых координатах

Теорема 6 (случай явного задания зависимости y от x (или x от y)).

1) Если кривая L является графиком функции $y = y(x)$, непрерывной и имеющей на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную $y'(x)$, то кривая L спрямляема, и её длина может быть найдена по формуле

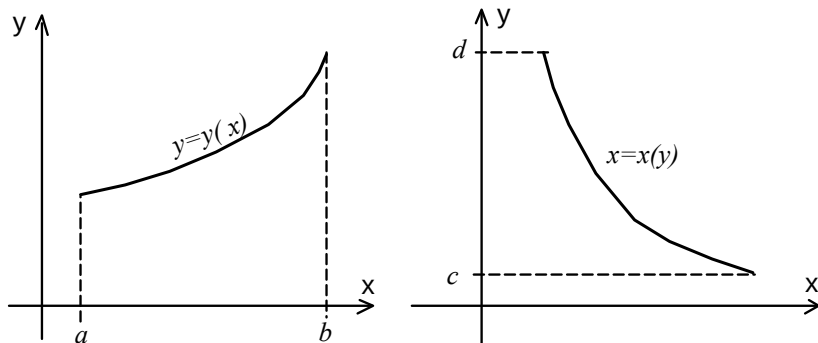
$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (7)$$

При этом дифференциал дуги L равен

$$dL = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

2) Если кривая L на плоскости задана уравнением $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, причём функция $x(y)$ непрерывна и имеет на сегменте $[c, d]$ непрерывную производную $x'(y)$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

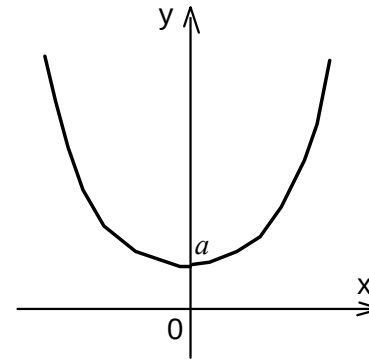
$$|L| = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (8)$$



Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы 1. В самом деле, введём параметризацию: $x = x(t)$, $y = t$, $t \in [c, d]$. Тогда, согласно формуле (1), имеем:

$$|L| = \int_c^d \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

Пример 5. Найти длину дуги параболы $y = x^2$, если $x \in [0, 2]$.



Решение. Зависимость y от x в данном случае задана явно, поэтому для длины дуги по формуле (7) получаем:

$$\begin{aligned} |L| &= \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{1 + t^2} dt = \left(\frac{t}{4} \sqrt{1 + t^2} \right) \Big|_0^4 + \\ &+ \left(\frac{1}{4} \ln |t + \sqrt{1 + t^2}| \right) \Big|_0^4 = \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln(4 + \sqrt{17}) \end{aligned}$$

(так как $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$).

Пример 6. Найти длину дуги цепной линии $y = ach \frac{x}{a}$ от точки $(0; a)$ до точки $(b; ach(b/a))$.

Решение. Поскольку $y'(x) = sh \frac{x}{a}$, то $1 + (y'(x))^2 = 1 + sh^2 \frac{x}{a} = ch^2 \frac{x}{a}$, и по формуле (7) находим

$$|L| = \int_0^b \sqrt{ch^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \left| ch \frac{x}{a} \right| dx = \int_0^b ch \frac{x}{a} dx = ash \frac{x}{a} \Big|_0^b = ash \frac{b}{a}.$$

Пример 7. Найти длину контура петли, образованной кривой

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x}.$$

Решение. Заметим, что кривая симметрична относительно оси абсцисс, и при $x = 0$ и $x = 1/3$ образованная графиком кривой петля пересекает эту ось. Так как $1 + (y'(x))^2 = \frac{(1+9x)^2}{36x}$, то по формуле (7) имеем

$$|L| = 2 \int_0^{1/3} \frac{1+9x}{6\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{1/3} (x^{-1/2} + 9x^{1/2}) dx = \frac{1}{3} (2x^{1/2} + 6x^{3/2}) \Big|_0^{1/3} = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 8. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \text{ где } y \in [1, e].$$

Решение. Кривая задана явно уравнением, разрешённым относительно x , поэтому длину её дуги вычисляем по формуле (8). Имеем: $x'(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}$,

$$1 + (x'(y))^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{4} \left(y + \frac{1}{y} \right)^2. \text{ Интегрируя, получим}$$

$$|L| = \frac{1}{2} \int_1^e \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} + \ln y \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

6.3.3. Случай неявного задания кривой в декартовых координатах

Если плоская кривая L задана в прямоугольной системе координат уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

не разрешённым относительно x или y , то в некоторых случаях для вычисления длины её дуги удаётся выразить явно y через x (или x через y), и затем воспользоваться формулами (7) (или (8)). В других случаях кривую можно параметризовать, и после этого вычислять длину дуги по формуле (1).

Пример 9. Найти длину части дуги астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первой четверти.

Решение. Кривая имеет вид, изображённый на рисунке.

1-й способ. Выразим явно из уравнения переменную y :

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}, \text{ тогда } y'(x) = - \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} / x^{\frac{1}{3}} \text{ и по формуле (7) оп-}$$

ределяем искомую длину дуги

$$|L| = \int_0^a \sqrt{1 + \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} / x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a}{x}} dx = \frac{3a}{2}.$$

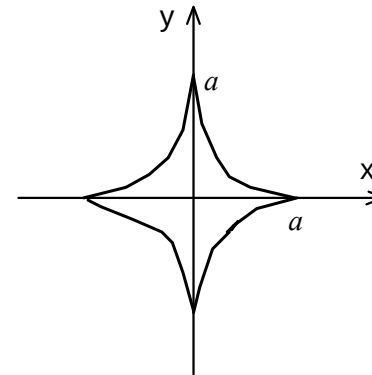
2-й способ. Воспользуемся параметрическими уравнениями астроида:

$x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Указанной в условии задачи части дуги соответствует изменение параметра t от 0 до $\pi/2$, при этом

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t,$$

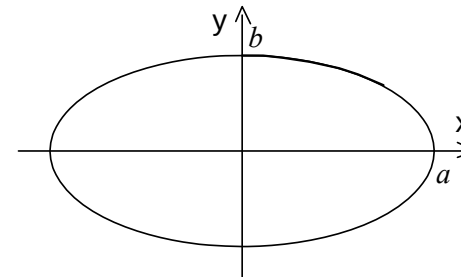
$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Поэтому по формуле (1) получим:



$$|L| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{3a}{2}.$$

Пример 10. Найти длину дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) от точки $(0; b)$ до произвольной точки эллипса в первой четверти.



Решение. Кривая задана неявно; для её параметризации воспользуемся уравнениями $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$ (начальной точке кривой соответствует верхний конец малой полуоси). Длину дуги находим по формуле (1):

$$|L(t)| = \int_0^t \sqrt{(a \cos t)^2 + (-b \sin t)^2} dt = \\ = a \int_0^t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt,$$

где $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ – эксцентриситет эллипса.

Замечание (об эллиптических интегралах). Как мы только что видели, переменная дуга эллипса выражается интегралом

$$E(\varepsilon, t) = \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt,$$

который называется *эллиптическим интегралом II рода*. Название интеграла объясняется как раз его связью с рассмотренной задачей. Если $t = \pi/2$, то интеграл численно равен четверти длины эллипса. В этом случае эллиптический интеграл $E(\varepsilon, \pi/2)$ называют *полным эллиптическим интегралом II рода* и обозначают $E(\varepsilon)$.

Эллиптическим интегралом I рода называется интеграл вида

$$F(\varepsilon, t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}}.$$

При $t = \pi/2$ эллиптический интеграл $F(\varepsilon, \pi/2)$ называют *полным эллиптическим интегралом I рода* и обозначают $K(\varepsilon)$.

Эллиптические интегралы не выражаются в элементарных функциях. Для их вычисления можно воспользоваться специальными таблицами. Эти интегралы широко используются в математике.

К эллиптическим интегралам I и II родов сводится вычисление длин дуг гиперболы, улитки $r = a \cos \varphi + b$, лемнискаты $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, кривой Вивиани $x = a \sin^2 t$, $y = a \sin t \cos t$, $z = a \cos t$ и ряда других кривых на плоскости и в пространстве.

6.3.4. Случай явного задания кривой в полярных координатах

Теорема 7 (явное задание кривой в полярных координатах).

1) Если плоская кривая L задана в полярной системе координат при помощи уравнения $r = r(\varphi)$, разрешённого относительно r , где $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, причём функция $r(\varphi)$ непрерывна и имеет на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$ непрерыв-

ную производную $r'(\varphi)$, то кривая L спрямляема, и длина её дуги вычисляется по формуле

$$|L| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi \quad (9)$$

2) Если кривая задана уравнением $\varphi = \varphi(r)$, разрешённым относительно φ , где $r \in [r_1, r_2]$, причём функция $\varphi(r)$ непрерывна и имеет на сегменте $[r_1, r_2]$ непрерывную положительную производную $\varphi'(r)$, то длина её дуги вычисляется по формуле

$$|L| = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + (r \cdot \varphi'(r))^2} dr. \quad (10)$$

Замечание. При этом дифференциал дуги L равен

$$dL = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Доказательство. 1) Воспользуемся для доказательства формулами перехода от полярных координат к декартовым $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$, где в качестве параметра выступает $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда имеем

$$x'(\varphi) = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi$$

и

$$(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2,$$

откуда и получаем требуемый результат.

2) В самом деле, преобразуем подынтегральное выражение в интеграле (9) при помощи замены $\varphi = \varphi(r)$:

$$\sqrt{r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \sqrt{r^2 + \frac{1}{(\varphi'(r))^2}} \varphi'(r) dr = \\ = \sqrt{r^2 (\varphi'(r))^2 + 1} \cdot \operatorname{sgn}(\varphi'(r)) dr.$$

Если $\varphi'(r) > 0$ на сегменте $[r_1, r_2]$, то получаем для вычисления длины дуги формулу (10). Теорема доказана.

Отметим, что если кривая обладает свойствами *симметрии*, то это часто позволяет при вычислении интеграла выбрать более простые пределы интегрирования, и тем самым несколько упростить задачу.

Пример 11. Найти длину дуги кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$.

Решение. В этой задаче пределы интегрирования при использовании формулы (9) изначально не заданы и подлежат определению. Поскольку данная замкнутая кривая задаётся периодической функцией с периодом 2π , то в качестве нижнего и верхнего пределов интегрирования можно взять 0 и 2π .

Так как $r'(\varphi) = -a \sin \varphi$,
 $r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2 = a^2(2 + 2 \cos \varphi) =$
 $= 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, то по формуле (9), учи-

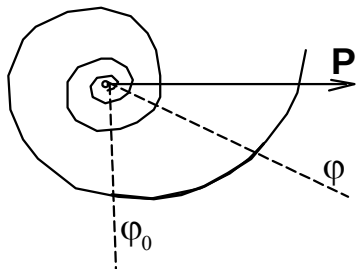
тывая симметрию данной кривой относительно полярной оси, находим

$$|L| = \int_0^{2\pi} 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Пример 12. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{b\varphi}$ ($a > 0, b > 0$) от точки $(r_0; \varphi_0)$ до точки $(r; \varphi)$.

Решение. Кривая имеет вид, изображённый на рисунке. По формуле (9) имеем, что

$$\begin{aligned} |L| &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2 e^{2b\varphi} + a^2 b^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = \\ &= a\sqrt{1+b^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{b\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{a}{b} \sqrt{1+b^2} (e^{b\varphi} - e^{b\varphi_0}) = \\ &= \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (r - r_0). \end{aligned}$$



Заметим, что если бы требовалось вычислить длину дуги $r = ae^{b\varphi}$ ($a > 0, b > 0$) при $0 < r < a$, то, определив область изменения φ ($-\infty < \varphi < 0$), пришли бы к несобственному интегралу

$$\begin{aligned} |L| &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2 e^{2b\varphi} + a^2 b^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = a\sqrt{1+b^2} \int_{-\infty}^0 e^{b\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{a}{b} \sqrt{1+b^2} e^{b\varphi} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}. \end{aligned}$$

Пример 13. Найти длину дуги кривой $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$, где $r \in [1, 5]$.

Решение. Здесь можно явно выразить зависимость $r = r(\varphi)$ и затем воспользоваться формулой (9), однако это приводит к громоздким вычислениям.

Проще сразу воспользоваться формулой (10). Имеем: $\varphi'(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right)$,

$1 + (r \cdot \varphi'(r))^2 = \frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2$, откуда для длины дуги получаем

$$|L| = \frac{1}{2} \int_1^5 \left(r + \frac{1}{r} \right) dr = \left(\frac{r^2}{4} + \frac{1}{2} \ln r \right) \Big|_1^5 = 6 + \frac{1}{2} \ln 5.$$

Пример 14. Найти длину дуги кривой, заданной посредством интеграла с переменным верхним пределом: $\varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$ ($0 \leq r \leq R$).

Решение. Найдём $\varphi'(r) = \frac{\operatorname{sh} r}{r}$, $(r\varphi'(r))^2 + 1 = \operatorname{sh}^2 r + 1 = \operatorname{ch}^2 r$. Тогда по формуле (10) имеем:

$$|L| = \int_0^R \operatorname{ch} r dr = \operatorname{sh} r \Big|_0^R = \operatorname{sh} R.$$

6.3.5. Случай параметрического задания кривой в полярных координатах

Теорема 8 (параметрическое задание кривой в полярных координатах). Если плоская кривая L задана уравнениями $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, где функции $r(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные $r'(t)$, $\varphi'(t)$ ($\varphi'(t) \neq 0$) на сегменте $[T_0, T]$, то эта кривая спрямляема, и длина её дуги может быть вычислена по формуле

$$|L| = \int_{T_0}^T \sqrt{r^2(t) + \left(\frac{r'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt. \quad (11)$$

Доказательство этого факта сразу следует из формулы (9), так как в условиях нашей теоремы $r'(\varphi) = \frac{r'(t)}{\varphi'(t)}$, $d\varphi = \varphi'(t)dt$.

Пример 15. Найти длину дуги кривой $r = ue^{2u}$, $\varphi = u^2 + 2u$, где параметр $u \in [0, 2]$.

Решение. Перейдём в интеграле (9) к новой переменной интегрирования u по формуле $\varphi = \varphi(u)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{r'(u)}{\varphi'(u)}\right)^2} \cdot \varphi'(u) du = \\ &= \sqrt{r^2 (\varphi'(u))^2 + (r'(u))^2} \cdot \operatorname{sgn}(\varphi'(u)) du. \end{aligned}$$

Для данной кривой имеем:

$$\begin{aligned} r'(u) &= e^{2u}(1 + 2u), \quad \varphi'(u) = 2u + 2, \quad r^2(\varphi'(u))^2 + (r'(u))^2 = \\ &= e^{4u}(4u^2(u^2 + 2u + 1) + (1 + 4u + 4u^2)) = e^{4u}(2u^2 + 2u + 1)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|L| = \int_0^2 e^{2u}(2u^2 + 2u + 1) du = \frac{1}{2} \left(e^{2u}(2u^2 + 1) \right) \Big|_0^2 = \frac{9e^4 - 1}{2}.$$

6.3.6. Случай неявного задания кривой в полярных координатах

Если плоская кривая L задана в полярной системе координат уравнением $F(r, \varphi) = 0$, не разрешённым относительно r или φ , то в некоторых случаях для вычисления длины её дуги удаётся выразить явно r через φ (или φ через r), и затем воспользоваться формулами (9) (или (10)). В других случаях кривую можно параметризовать, и после этого вычислять длину дуги по формуле (11).

Пример 16. Найти длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $A(2; 1/2)$ до точки $B(1/2; 2)$.

Решение. Легко выражая явно $r = 1/\varphi$, находим $r'(\varphi) = -1/\varphi^2$ и по формуле (9) определяем

$$|L| = \int_{1/2}^2 \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}} d\varphi = \int_{1/2}^2 \frac{1}{\varphi^2} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi.$$

Сделав гиперболическую подстановку $\varphi = sh t$, придём к интегралу

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{areash} 1/2}^{\operatorname{areash} 2} \frac{1}{sh^2 t} \sqrt{1 + sh^2 t} ch t dt &= \int_{\operatorname{areash} 1/2}^{\operatorname{areash} 2} \frac{ch^2 t}{sh^2 t} dt = \int_{\operatorname{areash} 1/2}^{\operatorname{areash} 2} \frac{1 + sh^2 t}{sh^2 t} dt = \\ &= \int_{\operatorname{areash} 1/2}^{\operatorname{areash} 2} \left(\frac{1}{sh^2 t} + 1 \right) dt = (-ctht + t) \Big|_{\operatorname{areash} 1/2}^{\operatorname{areash} 2} = \\ &= -cth(\operatorname{areash} 2) + \operatorname{areash} 2 + cth\left(\operatorname{areash} \frac{1}{2}\right) - \operatorname{areash} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Так как $|cth(\operatorname{areash} t)| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$, то

$$cth(\operatorname{areash} 2) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad cth\left(\operatorname{areash} \frac{1}{2}\right) = \sqrt{5}.$$

Кроме того, $\operatorname{areash} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$, $\operatorname{areash} \frac{1}{2} = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned} |L| &= -\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{5} - \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln \frac{2(2 + \sqrt{5})}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к §6

Найдите длины дуг следующих кривых, заданных параметрически в декартовой системе координат:

1. $x = a \cos^5 t$, $y = a \sin^5 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$).
2. $x = 2a \sin^2 t$, $y = 2a \cos t$.
3. $x = t^3/3 - t$, $y = t^2 + 2$ ($0 \leq t \leq 3$).

4. $x = 6at^5$, $y = 5at(1 - t^8)$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(6a;0)$.
5. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ ($0 \leq t \leq \ln \pi$).
6. $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$).
7. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (развёртка окружности).
8. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2 \arctgt - 2t + 8$ от точки $A(0;8)$ до точки $B(\ln 2; \pi/2 + 6)$.
9. $x = a \cos t$, $y = -2a \ln \sin t$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(x_0; y_0)$.
10. $x = \frac{a}{2} \sin t(1 + 2 \cos^2 t)$, $y = a \cos^3 t$ от точки $A(0;a)$ до точки $B(a/2;0)$.
11. $x = a \left(\cos t + \ln \tg \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$ от точки $A(0;a)$ до точки $B(x_0; y_0)$.
12. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$ ($0 \leq t \leq 1$).
13. $x = ch^3 t$, $y = sh^3 t$ ($0 \leq t \leq a$).
14. $x = 2ash^3 t$, $y = 3acht$ от точки $A(0;3a)$ до точки $B(x_0; y_0)$.
15. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ct$ от точки A ($t = 0$) до точки B (t – любое) (винтовая линия).
16. $x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $y = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3 + t^2$ ($0 \leq t \leq 1$).
17. $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $z = ht$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).
18. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $z = a \cos 2t$.

Найдите длины дуг следующих кривых, заданных явно в декартовой системе координат:

19. $y = x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 4$).
20. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq a$).
21. $y = \ln x$ ($3/4 \leq x \leq 12/5$).
22. $y = \ln \sin x$ ($\pi/3 \leq x \leq \pi/2$).
23. $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq a < \pi/2$).

24. $y = 1 - \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi/6$).
25. $y = 1 - \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi/3$).
26. $y = \ln(1 - x^2)$ ($0 \leq x \leq 1/2$).
27. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq b < a$).
28. $y = \arccos(e^{-x})$ ($0 \leq x \leq 1$).
29. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ ($0 \leq x \leq 7/9$).
30. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$ ($0 \leq x \leq 8/9$).
31. $y = \sqrt{x - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1)$.
32. $y = \frac{2}{5}x^4\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox .
33. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ ($0 < b \leq y \leq a$) (трактриса).
34. $x = \frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{ay}$ от точки $A(0;0)$ до точки $B\left(\frac{a}{6}; a\right)$.
35. $x = \frac{a}{3} + \frac{a^2}{2y} + \frac{y^3}{6a^2}$ от точки $A(a; a)$ до точки $B(5a; 3a)$.
36. Найдите длину границы области, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$.
37. Найдите длину границы области, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt[3]{x^2}$.

Найдите длину дуги кривой, заданной в декартовых координатах интегралом:

38. $y(x) = \int_1^x \sqrt{t^4 - 1} dt$ ($0 \leq x \leq 2$).
39. $y(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt$ ($0 \leq x \leq \pi/4$).

$$40. y(x) = \int_0^x \sqrt{\sin 2t} dt \quad (0 \leq x \leq \pi/4).$$

Найдите длину дуги кривой, заданной явно в полярной системе координат:

$$41. r = a\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (\text{один виток спирали Архимеда}).$$

42. Найдите длину дуги спирали Архимеда $r = a\varphi$, находящейся внутри круга радиуса $2\pi a$.

$$43. r = \varphi^2 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

$$44. r = a \sin \varphi.$$

$$45. r = 1 - \cos \varphi.$$

$$46. r = a \cos^3(\varphi/3) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$47. r = a \sin^3(\varphi/3).$$

$$48. r = a \cos^4(\varphi/4).$$

$$49. r = a \tan \frac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$50. r = 1/(1 + \cos \varphi) \quad (|\varphi| \leq \pi/2).$$

$$51. \varphi = \sqrt{r}, \text{ где } r \in [0, 5].$$

$$52. \varphi = \frac{r}{2} \sqrt{r^2 + 2} + \ln \left| r + \sqrt{r^2 + 2} \right| \quad (0 \leq r \leq 2).$$

$$53. \varphi = r + \ln r \quad (1 \leq r \leq 5).$$

Найдите длину дуги кривой, заданной параметрически в полярной системе координат:

$$54. r = 1 + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg}(t/2) \quad (0 \leq t \leq a < \pi).$$

55. $r = a \cos^2 t, \quad \varphi = 2(t - \operatorname{tg} t)$ от точки $A(a; 0)$ до точки $B(a/2; \pi/2 - 2)$.

56. $r = a(1 + \operatorname{tg} t), \quad \varphi = \operatorname{tg} t - \ln(1 + \operatorname{tg} t)$ от точки $A(a; 0)$ до точки $B(r_0; \varphi_0)$.

Найдите длину дуги кривой, заданной неявным уравнением (указание к первым двум задачам – перейти к параметрическому заданию кривой):

$$57. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1.$$

$$58. \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$$59. y^2 = x^3/(2a - x) \quad (0 \leq x \leq 5a/3).$$

60. Найдите длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключённой внутри параболы $y^2 = x/3$.

§ 7.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ ТЕЛ

7.1. Пространственное тело и связанные с ним понятия

Основные понятия и их определения в данном параграфе во многом аналогичны соответствующим понятиям и определениям параграфа 5 (посвящённого площадям плоских фигур), являясь их обобщениями на случай трёхмерного пространства.

Так, множество точек пространства будем называть *ограниченным*, если существует шар, содержащий все точки этого множества.

Пространственной фигурой будем называть любое непустое ограниченное множество точек пространства.

Две пространственные фигуры P_1 и P_2 называются *равными*, если существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояния между точками, при котором фигура P_1 отображается на фигуру P_2 .

Договоримся называть пространственной ε -окрестностью точки M ($\varepsilon > 0$) множество точек пространства, расположенных внутри шара радиуса ε с центром в точке M .

Точку M пространственной фигуры P назовём *внутренней точкой* этой фигуры, если найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что ε -окрестность точки M целиком принадлежит P . Точку M назовём *внешней точкой* пространственной фигуры P , если найдётся такое $\varepsilon > 0$, что ε -окрестность точки M целиком не принадлежит P .

Точку M назовём *граничной точкой* фигуры P , если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой фигуры P .⁵ Совокупность всех граничных точек фигуры P называется *границей* этой фигуры.

Сформулируем определение того, что в школьном курсе элементарной стереометрии называют телом. *Телом* называется ограниченная фигура в про-

⁵ Заметим, что точка M является *граничной точкой* фигуры P тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в ε -окрестности точки M содержатся как точки, принадлежащие фигуре P , так и точки, ей не принадлежащие.

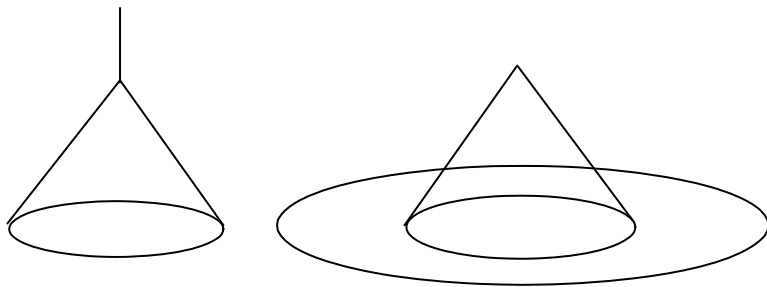
пространстве, обладающая двумя свойствами:

1) у неё есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить линией (например, ломаной), целиком лежащей внутри фигуры;

2) фигура содержит свою границу, и её граница совпадает с границей её внутренней области.

Согласно первому условию, фигура является *связной*. Поэтому фигура, состоящая из объединения двух шаров, не имеющих общих точек, строго говоря, телом уже не считается. Точно так же не считается телом фигура, состоящая из двух шаров, имеющих лишь одну общую точку.

Второе условие означает, что тело – это *замкнутое множество* точек, граница тела принадлежит ему, так что шар без соответствующей сферы или даже шар без одной её точки – уже не тело. Кроме того, граница тела везде прилегает к его внутренней области, так что конус «со шпилем» или конус «с полями», как изображено на рисунке ниже, телами не считаются.



Граница тела называется также его *поверхностью*.

В данном параграфе мы снимем ограничения на связность и замкнутость, и будем трактовать понятие тела в широком смысле, отождествляя его, по сути, с пространственной фигурой.

Далее, тело, образованное при вращении плоской ограниченной замкнутой фигуры F вокруг прямой, лежащей в плоскости этой фигуры и не содержащей её внутренних точек, называется *телом вращения*. Прямая, вокруг которой осуществляется вращение, называется *осью* тела вращения. Граница тела вращения (его поверхность) образуется при вращении границы плоской фигуры F (точки границы плоской фигуры, лежащие на оси вращения, являются внутренними точками тела вращения).

Сечение тела (поверхности) вращения плоскостью, перпендикулярной оси этого тела (этой поверхности), называется *перпендикулярным сечением* тела (поверхности) вращения. Перпендикулярным сечением тела (поверхности) вращения может быть круг (окружность), точка или кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями с центром на оси вращения. Сечение тела вращения плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением* этого тела. Поскольку поворот вокруг прямой на угол 180° есть

симметрия относительно этой прямой, то осевым сечением тела вращения является фигура, симметричная относительно его оси.

Многогранным телом в пространстве назовём множество, составленное из конечного числа ограниченных многогранников.

Напомним, что *многогранником* называют тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников, причём каждая сторона каждого такого многоугольника является стороной ещё одного (и только одного) многоугольника. Такую поверхность называют *замкнутой многогранной поверхностью*. Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его *гранями*. Уточним, что *гранью многогранника* следует считать только такой многоугольник на поверхности многогранника, который не содержится ни в каком другом многоугольнике, лежащем на поверхности многогранника (иначе он является лишь частью грани). Без учёта этого замечания можно было бы сказать, что грани куба, например, – это двенадцать равнобедренных прямоугольных треугольников, поскольку они составляют границу куба.

Приведём общее определение цилиндра.⁶ Пусть даны две параллельные плоскости α и α' , и на плоскости α задана некоторая квадрируемая фигура F . Из всех точек фигуры F проведём параллельные друг другу отрезки до плоскости α' . Фигура, которую образуют эти отрезки, и называется *цилиндром*. Фигура F при этом называется *основанием* цилиндра. Отрезки, образующие цилиндр, так и называются – *образующими*. Концы образующих, лежащие на плоскости α' , образуют ещё одно *основание* цилиндра. Таким образом, основания цилиндра равны друг другу и лежат в параллельных плоскостях. Иногда *образующими* называют только те из упомянутых выше отрезков, которые соединяют *граничные точки* оснований цилиндра.

Существует и другой подход к определению цилиндра.⁷ *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, производимая движением прямой линии AB , сохраняющей одно и то же направление и пересекающей данную линию Γ . Прямая AB называется *образующей*, а линия Γ – *направляющей* (см. рис. ниже).

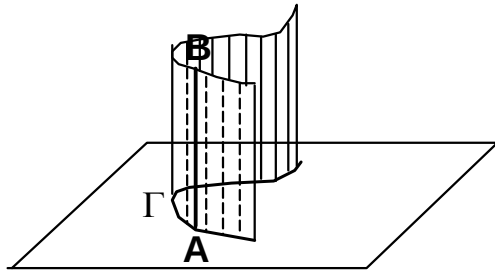
Если за направляющую цилиндрической поверхности взята окружность в некоторой плоскости, то такая поверхность называется *круговой*. Если плоскость, в которой лежит направляющая цилиндрической поверхности, перпендикулярна её образующей, то такая поверхность называется *прямой*.

Тогда *цилиндром* называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей (начало линии Γ совпадает с её концом)

⁶ Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. (Библиотека школьника). Висагинас, Alfa, 1998, стр.132.

⁷ Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Геометрия. Полный справочник (для школьников и абитуриентов). М.: Махаон, 2006. стр.180.

и двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие.



Часть поверхности, заключённая между параллельными плоскостями, называется при этом *боковой поверхностью* цилиндра, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью, — *основаниями* цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой* цилиндра. Соответственно, если

плоскости оснований цилиндра перпендикулярны образующим, то цилиндр называется *прямым*. Если в основании прямого цилиндра лежит круг, то такой цилиндр имеет название *прямого кругового цилиндра*. Отрезок, соединяющий центры его оснований, называется *осью* цилиндра.

Прямой круговой цилиндр можно определить также как тело, образуемое при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону. По этой причине второе название прямого кругового цилиндра — *цилиндр вращения*. В данном пособии под *цилиндрическим телом* будем понимать прямой цилиндр.

Назовём *ступенчатым телом* объединение конечного числа цилиндрических тел, расположенных так, что верхнее основание каждого предыдущего из этих тел находится в одной плоскости с нижним основанием последующего.

Определим теперь понятие *гладкой поверхности*. Пусть поверхность задаётся параметрически при помощи уравнений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой ограниченной замкнутой области Ω на плоскости Ouv . Непрерывную границу L этой области Ω будем считать состоящей из гладких кривых. Наконец, предположим, что поверхность не имеет ни кратных, ни других особых точек. Такая поверхность называется *гладкой*.

7.2. Понятие кубируемого тела. Объём тела

В элементарной стереометрии было введено понятие *объёма* для простейших пространственных тел, в том числе для многогранников. Отмечалось, что объём тела — это неотрицательное число, поставленное в соответствие этому телу, которое обладает следующими свойствами.

1°. (*Инвариантность*). Равные тела имеют равные объёмы.

2°. (*Аддитивность*). Если тело является объединением конечного числа тел, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, то объём данного тела равен сумме объёмов составляющих его тел.

3°. (*Существование единицы объёма*). Объём куба, длина ребра которого равна единице измерения длин отрезков, равен одной кубической единице и принимается за единицу измерения объёмов.

Тела, имеющие равные объёмы, назывались *равновеликими*. Заметим, что аналогичными свойствами характеризуются и площади плоских фигур, и длины отрезков (дуг кривых).

Введём понятие объёма для произвольного тела F в пространстве. Рассмотрим для этого всевозможные многогранные тела P , целиком содержащиеся в F , и многогранные тела Q , целиком содержащие F . Тела P будем называть *вписанными* в F , а тела Q — *описанными* около F .

Числовое множество $\{V(P)\}$ объёмов всех вписанных многогранных тел P ограничено сверху, например, объёмом любого описанного многогранного тела Q . Поэтому это множество имеет конечную точную верхнюю грань

$$\underline{V} = \sup_{P \subseteq F} V(P),$$

которую будем называть *нижним объёмом* тела F . Если в тело F нельзя вписать ни одного многогранника, то по определению полагается $\underline{V} = 0$.

Аналогично, числовое множество $\{V(Q)\}$ объёмов всех описанных около тела F многогранных тел Q ограничено снизу, например, объёмом любого вписанного многогранного тела или нулём, и поэтому у него существует конечная точная нижняя грань

$$\bar{V} = \inf_{Q \supseteq F} V(Q),$$

называемая *верхним объёмом* тела F . Очевидно, что $\underline{V} \leq \bar{V}$.

Тело F называется *кубируемым* (т.е. *имеющим конечный объём*), если

$$\underline{V} = \bar{V}.$$

Число $V = \underline{V} = \bar{V}$ называется при этом *объёмом* тела F (по Жордану).

Будем говорить, что тело F имеет *объём, равный нулю*, если это тело содержится в многогранном теле сколь угодно малого объёма.

Замечание 1. Подчеркнём, что введённое таким образом определение объёма, допускающее существование фигур нулевого объёма, распространяет понятие объёма на пространственную фигуру, не являющуюся телом в

«школьном» понимании. Например, поскольку объём сферы равен нулю, то объём шара, рассмотренного вместе с границей, и объём открытого шара (без границы), согласно введённому определению, существуют и равны. Далее, если не оговорено противное, под термином «тело» будем понимать кубическое тело.

Замечание 2. Понятие кубруемости допускает обобщение на случай неограниченных тел в пространстве.

Пусть F – неограниченное пространственное тело и $R > 0$ – действительное число. Обозначим через F_R тело, полученное при пересечении F с шаром радиуса R и с центром в начале координат: $F_R = U_R(O) \cap F$. Всегда можно выбрать такое достаточно большое R , чтобы $F_R \neq \emptyset$. Пусть, кроме того, для любого такого R ограниченное тело F_R кубуемо в смысле введённого выше определения. Если существует конечный предел

$$V(F) = \lim_{R \rightarrow +\infty} V(F_R),$$

то назовём тело F кубическим (в несобственном смысле), а число $V(F)$ – его объёмом. При вычислении объёмов таких тел с помощью определённых интегралов будем получать сходящиеся несобственные интегралы 1-го или 2-го рода (соответствующие примеры будут рассмотрены ниже – пример 3 пункта 7.5.1).

Замечание 3. Перечисленные свойства элементарных тел (неотрицательность, аддитивность, инвариантность, существование единицы) сохраняются и для произвольных кубических тел. Доказательство свойства аддитивности в случае, когда тела имеют общие граничные точки, аналогично соответствующему доказательству для плоского случая (см. теорему 4 раздела 5.3 §5).

Замечание 4. Подчёркнём, что свойство аддитивности выполняется для объединения любого конечного числа $F_1, F_2, \dots, F_n$ кубических тел без общих внутренних точек

$$V(F) = \sum_{i=1}^n V(F_i),$$

но уже объединение счётной совокупности кубических тел не является, вообще говоря, кубическим телом.

Замечание 5. Отметим также, что пересечение двух кубических тел есть кубическое тело.

7.3. Необходимые и достаточные условия кубруемости. Классы кубических тел

Существует тесная связь между кубическостью тела и величиной объёма его границы. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие кубическости). Для того чтобы тело F было кубическим, необходимо и достаточно, чтобы его граница имела объём нуль.

Доказательство этого факта можно провести с помощью таких же рассуждений, как и доказательство аналогичного факта в плоском случае (см. теорему 1 раздела 5.3 §5). Оно опирается на лемму 1, доказанную ниже.

Следствие. Объём кубического тела равен одному и тому же числу независимо от того, с границей или без границы рассматривается это тело.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие кубическости). Для того чтобы тело F было кубическим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности многогранных тел $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, соответственно, содержащихся в F и содержащих в себе F , объёмы которых имели бы общий предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(B_n) = V(F).$$

Доказательство этой теоремы приведено в книге [17], глава X, §2. Оно также легко может быть получено из следующих лемм 1 и 2.

Лемма 1. Тело F кубическим тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся многогранное тело $P \subset F$ и многогранное тело $Q \supset F$ такие, что $V(Q) - V(P) < \varepsilon$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть тело F кубическим, тогда $\underline{V}(F) = \bar{V}(F)$. По определению точной грани для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся многогранное тело $P \subset F$ такое, что $\underline{V}(F) - \frac{\varepsilon}{2} < V(P) \leq \underline{V}(F)$.

Аналогично найдётся многогранное тело $Q \supset F$ такое, что

$$\bar{V}(F) \leq V(Q) < \bar{V}(F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\underline{V}(F) = \bar{V}(F) = V(F)$, то, учитывая полученные неравенства, имеем:

$$V(F) - \frac{\varepsilon}{2} < V(P) \leq V(Q) < V(F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $V(Q) - V(P) < \varepsilon$.

2) *Достаточность*. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся многогранные тела $P \subset F$ и $Q \supset F$ такие, что $V(Q) - V(P) < \varepsilon$. Так как

$$V(P) \leq \underline{V}(F) \leq \bar{V}(F) \leq V(Q),$$

то

$$0 \leq \underline{V}(F) - \bar{V}(F) \leq V(Q) - V(P) < \varepsilon.$$

Но число $\varepsilon > 0$ произвольно, значения верхнего и нижнего объёма тела F от него не зависят, значит, $\underline{V}(F) = \bar{V}(F)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Тело F кубируемо тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся кубируемое тело $P \subset F$ и кубируемое тело $Q \supset F$ такие, что $V(Q) - V(P) < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость сразу следует из леммы 1, так как любое многогранное тело является кубируемым. Докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся кубируемые тела $P \subset F$ и $Q \supset F$ такие, что $V(Q) - V(P) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, согласно предыдущей лемме, найдутся многогранные тела P' и Q' такие, что $P' \subset P$, $Q' \supset Q$

$$V(P) - V(P') < \frac{\varepsilon}{4}, \quad V(Q') - V(Q) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Значит, $P' \subset F \subset Q'$ и

$$V(Q') - V(P') < V(Q) + \frac{\varepsilon}{4} - V(P) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что тело F кубируемо. Лемма 2 доказана.

Перечислим *основные классы* кубируемых тел.

1. Если основанием цилиндрического тела F является плоская квадрируемая фигура G , то тело F кубируемо, причём объём этого тела равен $V = S(G) \cdot h$, где $S(G)$ – площадь основания G , h – высота цилиндрического тела.

Доказательство. Так как фигура G квадрируема, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольные фигуры P и Q такие, что $P \subset G \subset Q$ и $S(Q) - S(P) < \frac{\varepsilon}{h}$. Пусть F_P и F_Q – многогранные тела с основаниями P и Q соответственно и высотой h . Тогда $F_P \subset F \subset F_Q$ и

$V(F_Q) - V(F_P) = h \cdot S(Q) - h \cdot S(P) < \varepsilon$. Значит, тело F кубируемо (лемма 1). С другой стороны, так как $S(P) \leq S(G) \leq S(Q)$, то $V(F_P) \leq h \cdot S(G) \leq V(F_Q)$. Но $V(F_P) \leq V(F) \leq V(F_Q)$ (поскольку $F_P \subset F \subset F_Q$), следовательно, $|V(F) - h \cdot S(G)| < \varepsilon$ для любого числа $\varepsilon > 0$. Из произвольности выбора ε заключаем, что $V(F) = S(G) \cdot h$, что и требовалось доказать.

2. Ступенчатое тело кубируемо, если основаниями составляющих его цилиндрических тел являются квадрируемые фигуры. Этот факт сразу следует из пункта 1 и свойства конечной аддитивности объёма тела.

3. Если для любого положительного числа ε можно указать такое содержащее F ступенчатое тело F_1 и такое содержащееся в F ступенчатое тело F_2 , что $V(F_1) - V(F_2) < \varepsilon$, то тело F кубируемо (см. лемму 2).

4. Если тело F ограничено поверхностью, задаваемой явным уравнением одного из трёх типов $z = z(x, y)$, $y = y(x, z)$, $x = x(y, z)$, где функции $z(x, y)$, $y(x, z)$, $x(y, z)$ – непрерывные функции своих аргументов в некоторых ограниченных областях, то тело F кубируемо.

5. Тело, ограниченное одной или несколькими гладкими поверхностями, кубируемо.

В последнем случае допустимо, впрочем, и наличие на ограничивающей тело поверхности конечного числа особых точек, которые могут быть выделены окрестностями с произвольно малым объёмом.

К основным типам задач, связанных с вычислением объёмов тел при помощи определённых (не кратных) интегралов,⁸ относятся вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям и вычисление объёмов тел вращения.

При этом зачастую приходится выполнять разбиение тела на несколько более простых тел, и вычислять объём тела как сумму объёмов составляющих его тел.

7.4. Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений

Рассмотрим в прямоугольной системе координат Oxy некоторое кубируемое тело F , расположенное между плоскостями $x = a$ и $x = b$ так, что

⁸ Объём тела в пространстве может быть вычислен также при помощи *тройных интегралов* (см., например, [18], глава XVIII, §1, стр.308).

при любом $x \in [a, b]$ сечение данного тела плоскостью, проходящей через точку $(x; 0; 0)$ перпендикулярно оси Ox , непусто и квадрируемо, причём известна площадь $S(x)$ этого сечения.

Теорема 1. Пусть площадь $S(x)$ сечения кубируемого тела F как функция x непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда объём тела F вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

Доказательство. Произведём разбиение $\bar{T}$ сегмента $[a, b]$ на оси Ox точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и разделим плоскостями $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, всё тело на слои. Рассмотрим i -й слой F_i , содержащийся между плоскостями

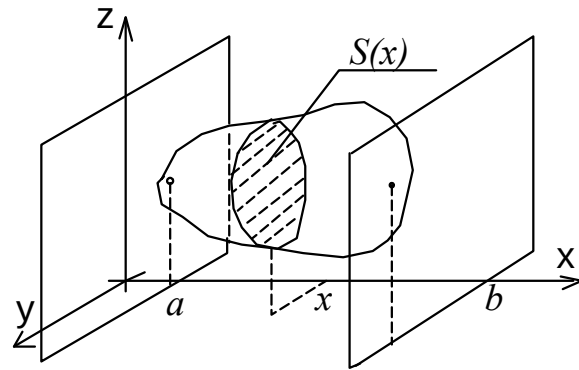
$$x = x_i \text{ и } x = x_{i+1},$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$. Так как он кубируем (как часть кубируемого тела F), то существуют многогранные тела P_i и Q_i , на-

пример, в виде совокупностей прямоугольных параллелепипедов с рёбрами, параллельными координатным осям, такие, что P_i целиком содержится в F_i , а Q_i содержит F_i внутри себя. Прделаав это для каждого слоя, в результате построим два отвечающих данному разбиению многогранных тела $P_{\bar{T}}$ и $Q_{\bar{T}}$, первое из которых содержится в F , а второе – содержит в себе F , объёмы которых удовлетворяют неравенству

$$V(P_{\bar{T}}) \leq V \leq V(Q_{\bar{T}}), \quad (*)$$

причём разность $V(Q_{\bar{T}}) - V(P_{\bar{T}})$ можно сделать меньше любого наперёд заданного положительного числа ε (при достаточно малом диаметре разбиения $\bar{T}$).



Так как к телам $P_{\bar{T}}$ и $Q_{\bar{T}}$ доказываемая формула, очевидно, применима, то, обозначив через $S_P(x)$ и $S_Q(x)$ площади их поперечных сечений, будем иметь

$$V(P_{\bar{T}}) = \int_a^b S_P(x) dx, \quad V(Q_{\bar{T}}) = \int_a^b S_Q(x) dx.$$

С другой стороны, так как $S_P(x) \leq S(x) \leq S_Q(x)$, то и

$$V(P_{\bar{T}}) = \int_a^b S_P(x) dx \leq \int_a^b S(x) dx \leq \int_a^b S_Q(x) dx = V(Q_{\bar{T}}). \quad (**)$$

Получили, что в силу $(*)$ и $(**)$ объём V тела F и интеграл $\int_a^b S(x) dx$

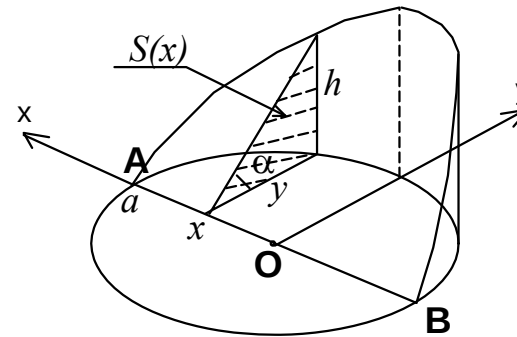
оба содержатся между одними и теми же числами $P_{\bar{T}}$ и $Q_{\bar{T}}$, разница между которыми меньше, чем ε . Так как ε можно выбрать произвольно малым, то отсюда и вытекает справедливость формулы (1).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить объём цилиндрического отрезка (т.е. геометрического тела, отсекаемого от прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания), если в основании цилиндра лежит круг радиуса a , секущая плоскость проходит через диаметр AB и составляет угол α с плоскостью основания.

Решение.

1-й способ. Поместим начало координат в точку O – центр круга, лежащего в основании цилиндра, и пусть ось абсцисс вдоль диаметра AB , а ось ординат – перпендикулярно ей в плоскости круга. Определим площадь сечения, перпендикулярного оси Ox . Это сечение пред-



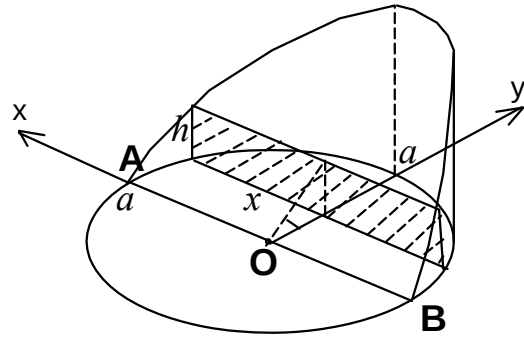
ставляет собой прямоугольный треугольник с основанием $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и высотой $h = \operatorname{tg} \alpha \cdot y = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{a^2 - x^2}$. Его площадь $S(x)$ равна

$\frac{1}{2}yh = tg\alpha(a^2 - x^2)$. Тогда по формуле (1) находим искомый объём цилиндрического отрезка

$$V = \int_{-a}^a S(x)dx = \frac{1}{2}tg\alpha \int_{-a}^a (a^2 - x^2)dx = tg\alpha \int_0^a (a^2 - x^2)dx =$$

$$= tg\alpha \left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3tg\alpha \text{ (куб.ед.)}$$

2-й способ. Ту же величину объёма можно было получить, рассекая тело плоскостями, перпендикулярными оси Oy . Найдём площадь поперечного сечения в этом случае.



Очевидно, сечение представляет собой прямоугольник с основанием $2x = 2\sqrt{a^2 - y^2}$ и высотой $h = tg\alpha \cdot y$. Поэтому площадь поперечного сечения равна

$$S(y) = 2xh =$$

$$= 2tg\alpha \cdot y\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Отсюда по формуле (1) находим объём

$$V = \int_0^a S(y)dy = 2tg\alpha \int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2}dy =$$

$$= \frac{2}{3}tg\alpha(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3tg\alpha \text{ (куб.ед.)}$$

3-й способ. Можно было вычислить объём цилиндрического отрезка, рассматривая его сечения, перпендикулярные оси аппликат Oz .

Пример 2. Найти объём тела, ограниченного поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (эллипсоид)}.$$

Решение. Найдём сечение эллипсоида, например, плоскостью $x = x_0$,

перпендикулярной оси Ox . Это эллипс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}$. Приведём его

уравнение к каноническому виду:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}\right)^2} = 1, \text{ или } \frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{b_1^2} = 1.$$

Площадь этого сечения (т.е. площадь эллипса) равна

$$S(x) = \pi a_1 b_1 = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Тогда, учитывая, что $-a \leq x_0 \leq a$, и интегрируя по формуле (1), находим искомый объём:

$$V = \int_{-a}^a S(x)dx = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

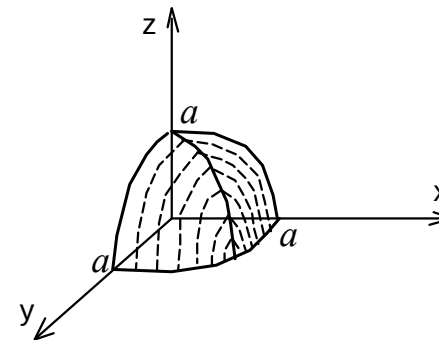
$$= 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc \text{ (куб.ед.)}$$

Заметим, что при решении задачи можно было аналогично рассматривать сечения эллипсоида плоскостями, перпендикулярными осям Oy или Oz .

Пример 3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

Решение. Данные уравнения задают два прямых круговых цилиндра, оси которых совпадают с осями Oy



и Ox соответственно. На рисунке изображена одна восьмая часть тела, образованного при пересечении этих цилиндров, лежащая в первом октанте. Рассмотрим сечение этой 1/8 части тела плоскостью, перпендикулярной оси Oz . Это будет квадрат, так как при фиксированном $z = z_0$ имеем:

$$x^2 = a^2 - z_0^2 = y^2.$$

Сторона данного квадрата равна $x = y = \sqrt{a^2 - z_0^2}$, а площадь сечения (квадрата), соответственно,

$$S(z_0) = xy = \sqrt{a^2 - z_0^2} \cdot \sqrt{a^2 - z_0^2} = a^2 - z_0^2.$$

Тогда объём всего тела равен

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = 8 \left(a^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16}{3} a^3 \text{ (куб.ед.)}$$

Пример 4. Тело F представляет собой множество точек $M(x; y; z)$, где $0 \leq z \leq 1$, причём $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, если z – рационально, и $-1 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$, если z – иррационально. Доказать, что объём этого тела не существует, хотя соответствующий интеграл $\int_0^1 S(z) dz$ существует и, очевидно, равен единице.

Решение. Проведём доказательство методом от противного. Допустим, что объём тела F существует; тогда он равен верхнему объёму тела, т.е. числу $\bar{V}(F) = \inf_{Q \supseteq F} V(Q)$, где $V(Q)$ – множество объёмов всех многогранников, описанных вокруг тела F (т.е. таких, каждому из которых принадлежат все точки тела F и его границы). Среди этих многогранников существует наименьший, представляющий собой объединение кубов

$$\{(x; y; z) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\} \text{ и } \{(x; y; z) \mid -1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 1\}.$$

Поэтому множество $V(Q)$ имеет точную нижнюю грань, равную $\bar{V}(F) = \inf_{Q \supseteq F} V(Q) = 2$. Таким образом, если объём тела существует, то он равен 2.

С другой стороны, множество рациональных чисел z сегмента $0 \leq z \leq 1$ является дополнением множества иррациональных чисел z из этого сегмента ко множеству всех его точек, поэтому объём $V(F)$ данного тела F заведомо не может превзойти объёма куба, ребро которого равно единице. Получили противоречие: $2 = V(F) \leq 1$, которое доказывает, что предположение о кубируемости тела было неверным.

7.5. Объём тела вращения в декартовых координатах

Рассмотрим основные случаи вычисления объёмов тел вращения. Во всех случаях во избежание возникновения неопределённости будем считать, что вращаемая криволинейная трапеция не пересекает оси вращения.

7.5.1. Криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox и вращается вокруг оси Ox

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда тело F_{Ox} , образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

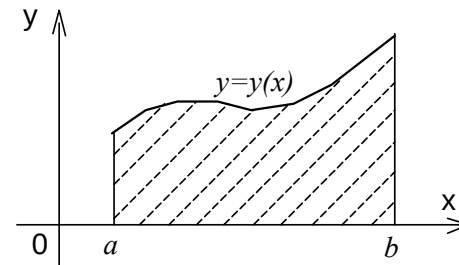
$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\},$$

кубируемо, и его объём V_{Ox} может быть вычислен по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (1)$$

Доказательство.⁹ Выполним произвольное разбиение $\bar{T}$ сегмента $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$



и обозначим через m_i и M_i соответственно точные нижнюю и верхнюю грани функции $y(x)$ на сегментах $[x_i, x_{i+1}]$,

$i = 0, 1, \dots, n-1$. На каждом таком сегменте построим два прямоугольника P_i и Q_i , у которых сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ является осно-

ванием, а m_i и M_i – соответственно высотами. В результате получатся две ступенчатые фигуры, одна из которых ($P_{\bar{T}}$) содержится в криволинейной трапеции F , а другая ($Q_{\bar{T}}$) содержит её.

При вращении F и этих ступенчатых фигур $P_{\bar{T}}$ и $Q_{\bar{T}}$ вокруг оси Ox образуются тело F_{Ox} и два ступенчатых тела, одно из которых (P_{Ox}) со-

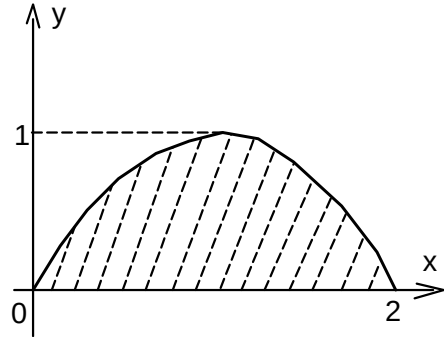
⁹ [9], с.420.

держится в F_{OX} , а другое (Q_{OX}) – содержит в себе F_{OX} . Объёмы этих тел равны соответственно

$$V(P_{OX}) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \Delta x_i \text{ и } V(Q_{OX}) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \Delta x_i.$$

Легко видеть, что эти выражения представляют собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $\pi y^2(x)$. Поскольку эта функция, будучи непрерывной, интегрируема на сегменте $[a, b]$, то найдётся такое разбиение этого сегмента, что разность указанных сумм для него будет меньше любого наперёд заданного положительного числа ε . Следовательно, тело кубируемо. Поскольку предел указанных сумм при стремлении диаметра разбиения сегмента $[a, b]$ к нулю равен $\pi \int_a^b y^2(x) dx$, то объём V_{OX} тела F_{OX} вычисляется по формуле (1), что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.



Решение.

По формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} V_{OX} &= \pi \int_0^2 y^2(x) dx = \\ &= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \end{aligned}$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} \text{ (куб.ед.)}$$

Замечание 1 (обобщение на случай функции $y(x)$, не меняющей знака на $[a, b]$). Легко видеть, что тела, полученные вращением вокруг оси Ox каждой из двух симметричных друг другу относительно этой оси криволинейных трапеций

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\}$$

и

$$F_- = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, -y(x) \leq y \leq 0, y \in C[a, b]\}$$

(а значит, и их объёмы), совпадают. В подобных ситуациях для получения из (1) формулы, справедливой в любом случае, когда функция $y(x)$ не меняет знака на $[a, b]$, в подынтегральном выражении достаточно заменить $y(x)$ на $|y(x)|$. Но поскольку функция $y(x)$ входит в формулу (1) в квадрате, то указанная формула полностью сохраняет свой вид и в случае вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции вида F_- .

Обобщая этот результат, получим, что для криволинейных трапеций любого из видов

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\}$$

или

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, y(x) \leq y \leq 0, y \in C[a, b]\}$$

(не пересекающих оси вращения Ox), верна формула (1) для вычисления объёма соответствующего тела вращения.

Замечание 2 (обобщение на случай криволинейной трапеции общего вида, заданной стандартно относительно оси Ox).

Заметим, что объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y_1(x) \leq y \leq y_2(x), y_1, y_2 \in C[a, b]\}$$

вокруг оси Ox , может быть вычислен как разность объёмов тел, полученных вращением вокруг оси Ox трапеций

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y_2(x), y_2 \in C[a, b]\}$$

и

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y_1(x), y_1 \in C[a, b]\}.$$

Таким образом, приходим к формуле

$$V_{OX} = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx.$$

Аналогично, объём тела, полученного вращением трапеции

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \leq 0, y_1, y_2 \in C[a, b]\}$$

вокруг оси Ox , может быть вычислен как разность объёмов тел, полученных вращением вокруг оси Ox трапеций

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq 0, y_1 \in C[a, b]\}$$

и $F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_2(x) \leq y \leq 0; y_2 \in C[a, b]\}$.

В этом случае для вычисления объёма имеем формулу

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (y_1^2(x) - y_2^2(x)) dx.$$

Пусть теперь F – стандартная относительно оси Ox криволинейная трапеция, ограниченная сверху и снизу графиками непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций $y_2(x)$ и $y_1(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x); y_1, y_2 \in C[a, b]\},$$

не пересекающая оси Ox .

Объединяя результаты двух предыдущих случаев в один, получаем, что объём тела, образованного вращением F вокруг Ox , вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b |y_2^2(x) - y_1^2(x)| dx. \quad (2)$$

Пример 2. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = 2x - x^3$ ($x \geq 0$).

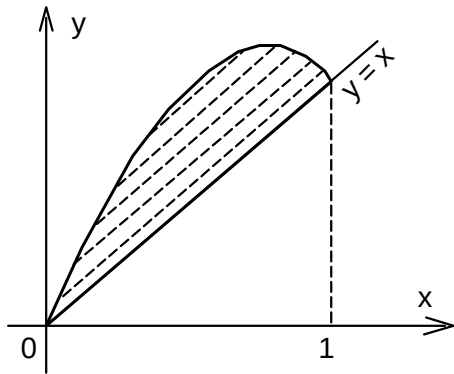
Решение.

Данная фигура является стандартной относительно оси Ox :

$$F = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x - x^3\},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx \\ &= \pi \int_0^1 ((2x - x^3)^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \int_0^1 (x^6 - 4x^4 + 3x^2) dx = \frac{12\pi}{35} \quad (\text{куб.ед}). \end{aligned}$$



Замечание 3 (случай произвольных a и b). Отметим, что формула (1) остаётся справедливой для произвольных (любого знака и не обязательно конечных) действительных a и b таких, что $a \leq b$, т.е. её можно использо-

вать для вычисления объёма тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\}.$$

Пример 3. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y = e^{-x} \sqrt{\sin x} \text{ и } y = 0 \quad (0 \leq x < +\infty).$$

Решение. Покажем, что в данном примере фигура вращения, являясь неограниченной, имеет, тем не менее, конечный объём (получаемый по формуле (1) несобственный интеграл сходится). Так как $\sin x \geq 0$ при $2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то

$$V_{Ox} = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} e^{-2x} \sin x dx.$$

Сделаем в каждом из интегралов замену $t = x - 2\pi n$:

$$V_{Ox} = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} e^{-2(t+2\pi n)} \sin(t+2\pi n) dt = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-4\pi n} \int_0^{\pi} e^{-2t} \sin t dt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= -\pi \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-4\pi n} \cdot \frac{e^{-2t}}{5} (\cos t + 2 \sin t) \Big|_0^{\pi} = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-4\pi n} \cdot \frac{1}{5} (1 + e^{-2\pi}) = \\ &= \frac{\pi}{5} (1 + e^{-2\pi}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-4\pi n}. \end{aligned}$$

Вычисляя сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = e^{-4\pi}$ ($S = \frac{b_1}{1-q}$),

окончательно получаем

$$V_{Ox} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{(1 + e^{-2\pi})}{1 - e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{(1 + e^{-2\pi})}{(1 - e^{-2\pi})(1 + e^{-2\pi})} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})} \quad (\text{куб.ед}).$$

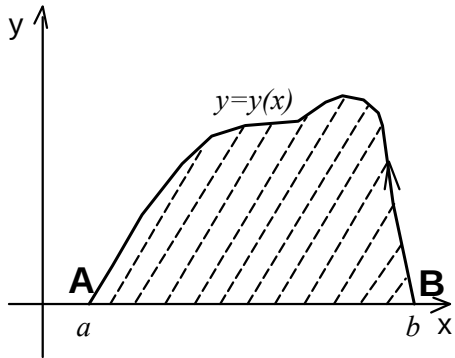
Замечание 4 (случай криволинейной трапеции, расположенной стандартно относительно оси Ox и ограниченной кривой, заданной параметрически).

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a, b]$ функции $y = y(x)$, обращаемой на концах этого сегмента в нуль, и снизу – отрезком оси Ox от a до b :

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y(a) = y(b) = 0\}.$$

Пусть, кроме того, график функции $y(x)$ допускает параметризацию с помощью уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T], \quad x(T_0) = b, \quad x(T) = a,$$

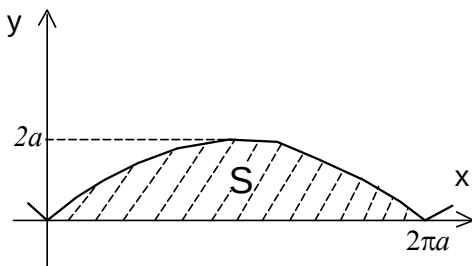


где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T]$, и при изменении параметра t от T_0 до T точка $(x(t); y(t))$ движется по кривой так, что криволинейная трапеция остаётся слева (т.е. в направлении от точки $B(x(T_0); 0)$ к точке $A(x(T); 0)$, см. рисунок).

Перейдём в подынтегральном выражении в формуле (1) к переменной интегрирования t , и получим следующую формулу для вычисления объёма тела вращения для этого случая:

$$V_{OX} = \pi \int_a^b y^2(x) dx = \pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt = -\pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt. \quad (3)$$

Пример 4. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$,



$$y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ и } y = 0.$$

Решение. По формуле (3) имеем

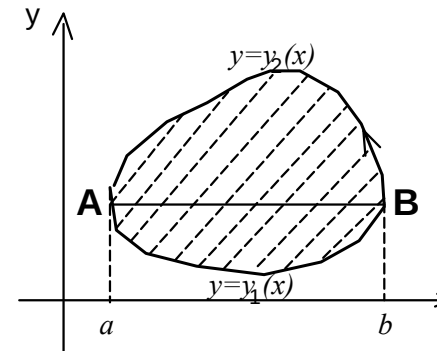
$$\begin{aligned} V_{OX} &= \pi \int_0^{2\pi a} y^2(x) dx = \\ &= \pi \int_0^{2\pi} y^2(t) x'(t) dt = \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 (a(1 - \cos t)) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \end{aligned}$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3 \cos t + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos^3 t \right) dt.$$

Подынтегральное выражение содержит слагаемые с нечётными степенями функций $\cos t$, $\cos 2t$, графики которых центрально симметричны относительно середины промежутка интегрирования – точки $(\pi; 0)$, – поэтому интегралы от этих слагаемых по сегменту $[0, 2\pi]$ равны нулю. Следовательно,

$$V_{OX} = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} \right) dt = 5\pi^2 a^3 \quad (\text{куб.ед}).$$

Замечание 5 (случай, когда вращаемая вокруг оси Ox область ограничена замкнутой кривой, заданной параметрически).



Пусть замкнутый контур L , ограничивающий вращаемую фигуру и не пересекающий ось Ox , представляет собой объединение двух простых кривых, являющихся графиками непрерывных на $[a, b]$ неотрицательных функций $y = y_2(x)$ (ограничивает фигуру сверху) и $y = y_1(x)$ (ограничивает фигуру снизу), причём $y_1(a) = y_2(a)$ и

$y_1(b) = y_2(b)$. Итак, имеем ограниченную контуром L фигуру

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y_1(x) \leq y \leq y_2(x), y_1(a) = y_2(a), y_1(b) = y_2(b)\}.$$

Пусть, кроме того, кривая L допускает единую параметризацию уравнениями $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T],$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T]$, и при изменении параметра t от T_0 до T точка $(x(t); y(t))$ движется по кривой так, что ограниченная ею область остаётся слева. В частности, при изменении t от T_0 до T_1 ($x(T_1) = a$) точка движется в направлении против часовой стрелки от точки $B(x(T_0); y(T_0))$ к точке $A(x(T_1); y(T_1))$. Затем при дальнейшем увеличении t от T_1 до T точка $(x(t); y(t))$ продолжает движение в том же направлении, возвращаясь к точке $B(x(T); y(T))$ – см. рисунок).

Тогда, переходя к переменной интегрирования t в формуле

$$V_{OX} = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx,$$

получим

$$\begin{aligned} V_{OX} &= \pi \int_a^b y_2^2(x) dx - \pi \int_a^b y_1^2(x) dx = \pi \int_{T_1}^{T_0} y^2(t) x'(t) dt - \pi \int_{T_1}^T y^2(t) x'(t) dt = \\ &= -\pi \int_{T_0}^{T_1} y^2(t) x'(t) dt - \pi \int_{T_1}^T y^2(t) x'(t) dt = -\pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Справедливость полученной формулы (4) сохраняется для произвольной области F , не пересекающей оси Ox и ограниченной непрерывной кусочно-гладкой замкнутой кривой

$$L = \{(x; y) \mid x = x(t), y = y(t), t \in [T_0, T]; x(T_0) = x(T), y(T_0) = y(T)\},$$

где при изменении параметра t от T_0 до T кривая L проходится так, что область F остаётся слева.

Пример 5. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной петлёй кривой $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$.

Решение. Определим, каким значениям параметра отвечает петля этой непрерывной кривой. Для этого заметим, что $x(0) = x(2) = 0$, $y(0) = y(2) = 0$, т.е. в начале координат кривая пересекает сама себя (точка самопересечения). Значит, петля приходится на изменение параметра t от 0 до 2. Из вида функции $x(t)$ дополнительно определяем, что при возрастании t от 0 до 1 величина $x(t)$ также возрастает от 0 до 1, а при дальнейшем возрастании t от 1 до 2 значение $x(t)$ убывает от 1 до 0.

По формуле (4) имеем

$$\begin{aligned} V_{OX} &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 y^2(t) dx(t) - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} y^2(t) dx(t) = -\pi \int_0^2 y^2(t) dx(t) = \\ &= -\pi \int_0^2 (4t - t^3)^2 (2 - 2t) dt = 2\pi \int_0^2 (16t^2 - 8t^4 + t^6) (t - 1) dt = \\ &= 2\pi \int_0^2 (t^7 - t^6 - 8t^5 + 8t^4 + 16t^3 - 16t^2) dt = \end{aligned}$$

$$= 2\pi \left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} - \frac{4}{3}t^6 + \frac{8}{5}t^5 + 4t^4 - \frac{16}{3}t^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{35}\pi \text{ (куб.ед.)}$$

Замечание 6 (случай криволинейной трапеции, расположенной стандартно относительно оси Oy и вращаемой вокруг оси Oy).

Пусть F – стандартная относительно оси Oy криволинейная трапеция, ограниченная справа и слева соответственно графиками непрерывных на сегменте $[c, d]$ функций $x_2(y)$ и $x_1(y)$, снизу и сверху – прямыми $y = c$ и $y = d$ соответственно:

$$F = \{(x; y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y), x_1, x_2 \in C[c, d]\},$$

и при этом не пересекающая оси Oy .

Используя рассуждения, аналогичные проведённым в замечании 2, доказывается, что объём тела F_{OY} , полученного вращением F вокруг оси Oy , вычисляется по формуле

$$V_{OY} = \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y)) dy, \quad (5)$$

«симметричной» формуле (2).

Пример 6. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $x = 2y - y^3$ ($y \geq 0$).

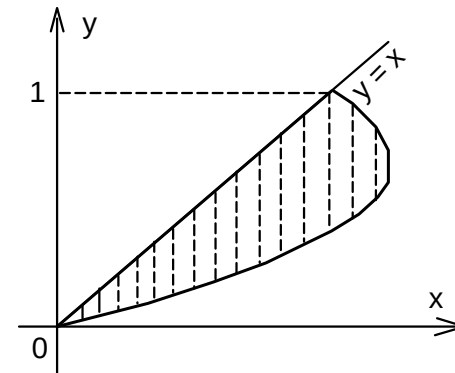
Решение.

Данная фигура является стандартной относительно оси Oy :

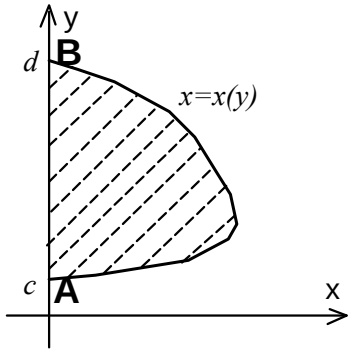
$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y - y^3\},$$

следовательно, по формуле (5) получаем

$$\begin{aligned} V_{OY} &= \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y)) dy = \\ &= \pi \int_0^1 ((2y - y^3)^2 - y^2) dy = \\ &= \pi \int_0^1 (y^6 - 4y^4 + 3y^2) dy = \\ &= 12\pi/35 \text{ (куб.ед.)} \end{aligned}$$



Замечание 7 (случай криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy и ограниченной кривой, заданной параметрически).



Пусть дана криволинейная трапеция, прилежащая к оси Oy . С одной стороны эта трапеция ограничена графиком непрерывной и не меняющей знака на сегменте $[c, d]$ функции $x = x(y)$, обращающейся на концах этого сегмента в нуль, а с другой – отрезком оси Oy от c до d . Так как трапеция не пересекает ось Oy , то она может иметь любой из двух видов:

$$F = \{(x; y) \mid c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq x(y), x(c) = x(d) = 0\}$$

или

$$F = \{(x; y) \mid c \leq y \leq d, x(y) \leq x \leq 0, x(c) = x(d) = 0\}.$$

Пусть, кроме того, график функции $x(y)$ допускает параметризацию с помощью уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T], \quad y(T_0) = c, \quad y(T) = d,$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T]$, и при изменении параметра t от T_0 до T точка $(x(t); y(t))$ движется по кривой так, что криволинейная трапеция остаётся слева (т.е. в направлении от точки $A(0; y(T_0))$ к точке $B(0; y(T))$).

Перейдя в подынтегральном выражении в формуле

$$V_{OY} = \pi \int_c^d x^2(y) dy$$

к переменной интегрирования t , получим необходимую формулу для вычисления объёма тела вращения для рассматриваемого случая:

$$V_{OY} = \pi \int_{T_0}^T x^2(t) y'(t) dt. \quad (6)$$

Пример 7. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$x = a(1 - \cos t), \quad y = a(t - \sin t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ и } x = 0.$$

Решение. По формуле (6) имеем:

$$\begin{aligned} V_{OY} &= \pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 (a(1 - \cos t)) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3 \cos t + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos^3 t \right) dt. \end{aligned}$$

Вычисляя этот интеграл (см. пример 4 выше), находим

$$V_{OY} = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} \right) dt = 5\pi^2 a^3 \quad (\text{куб.ед}).$$

Замечание 8 (случай, когда вращаемая вокруг оси Oy область ограничена замкнутой кривой, заданной параметрически).

Пусть простая замкнутая кривая L , ограничивающая фигуру вращения F , не пересекает оси Oy и параметризуется при помощи уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T], \quad x(T_0) = x(T), \quad y(T_0) = y(T),$$

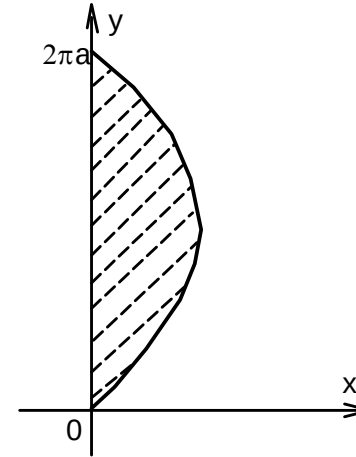
где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T]$, и при изменении параметра t от T_0 до T точка $(x(t); y(t))$ движется по кривой так, что ограниченная ею область остаётся слева.

Используя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в замечании 5, получим следующую формулу для вычисления объёма тела, образованного вращением F вокруг оси Oy :

$$V_{OY} = \pi \int_{T_0}^T x^2(t) y'(t) dt. \quad (7)$$

Пример 8. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной петлёй кривой $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$.

Решение. Поскольку (см. пример 5 выше) петля отвечает изменению параметра t от 0 до 2, причём при возрастании t от 0 до 1 величина $x(t)$ воз-

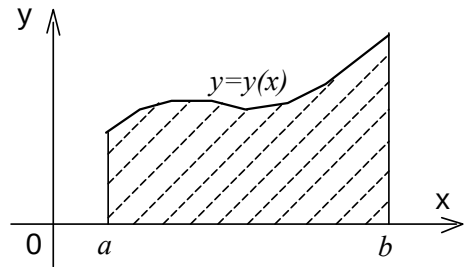


растает от 0 до 1, а при возрастании t от 1 до 2 значение $x(t)$ убывает от 1 до 0, то по формуле (7) имеем

$$\begin{aligned} V_{OY} &= \pi \int_{T_0}^T x^2(t) y'(t) dt = \pi \int_0^2 (2t - t^2)^2 (4 - 3t^2) dt = \\ &= -\pi \int_0^2 (3t^6 - 12t^5 + 8t^4 + 16t^3 - 16t^2) dt = \\ &= -\pi \left(\frac{3t^7}{7} - 2t^6 + \frac{8t^5}{5} + 4t^4 - \frac{16t^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \pi \left(\frac{128 \cdot 19}{21} - \frac{256}{5} - 64 \right) = \frac{64\pi}{105} \text{ (куб.ед)}. \end{aligned}$$

Для решения задачи также можно было воспользоваться формулой (13) (пример 12 ниже).

7.5.2. Криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox и вращается вокруг оси Oy



Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда тело F_{OY} , образованное вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\},$$

кубируемо, и его объём V_{OY} может быть вычислен по формуле

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx. \quad (8)$$

Доказательство.¹⁰ Выполним произвольное разбиение $\bar{T}$ сегмента $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

¹⁰ [2], с.254.

и обозначим через m_i и M_i соответственно точные нижнюю и верхнюю грани функции $y(x)$ на сегментах $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. На каждом таком сегменте построим два прямоугольника P_i и Q_i , у которых сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ является основанием, а m_i и M_i — соответственно высотами. В результате получатся две ступенчатые фигуры, одна из которых ($P_{\bar{T}}$) содержится в криволинейной трапеции F , а другая ($Q_{\bar{T}}$) содержит её.

При вращении вокруг оси Oy каждый из прямоугольников P_i и Q_i образует цилиндрическое кольцо, высота которого есть соответственно m_i или M_i , а основанием является плоское кольцо с внешним радиусом x_{i+1} и внутренним x_i . Объёмы таких цилиндрических колец равны соответственно

$$\pi m_i (x_{i+1}^2 - x_i^2) \text{ и } \pi M_i (x_{i+1}^2 - x_i^2).$$

При вращении вокруг Oy F и ступенчатых фигур $P_{\bar{T}}$ и $Q_{\bar{T}}$ образуются тело F_{OY} и два тела в виде объединения цилиндрических колец, одно из которых (P_{OY}) содержится в F_{OY} , а другое (Q_{OY}) — содержит в себе F_{OY} . Объёмы этих тел равны соответственно

$$V(P_{OY}) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 (x_{i+1}^2 - x_i^2) \text{ и } V(Q_{OY}) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 (x_{i+1}^2 - x_i^2).$$

Представим разность $x_{i+1}^2 - x_i^2$ в виде

$$2x_i (x_{i+1} - x_i) + (x_{i+1} - x_i)^2 = 2x_i \Delta x_i + \Delta^2 x_i.$$

Тогда

$$V(P_{OY}) = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i x_i \Delta x_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta^2 x_i,$$

$$V(Q_{OY}) = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i x_i \Delta x_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta^2 x_i.$$

Легко видеть, что первые слагаемые в этих выражениях представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для функции $2\pi x y(x)$.

Обозначим через $\Delta_{\bar{T}}$ диаметр разбиения $\bar{T}$ и устремим $\Delta_{\bar{T}}$ к нулю. Поскольку функция $2\pi x y(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то

$$\lim_{\Delta\bar{T} \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i x_i \Delta x_i = \lim_{\Delta\bar{T} \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i x_i \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx.$$

Далее, в силу оценок

$$\pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta^2 x_i < \Delta\bar{T} \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \text{ и } \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta^2 x_i < \Delta\bar{T} \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

и интегрируемости $\pi y(x)$ на $[a, b]$

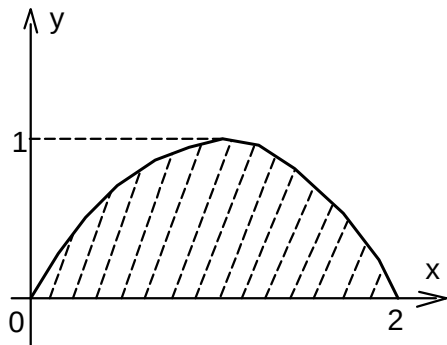
$$\lim_{\Delta\bar{T} \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \lim_{\Delta\bar{T} \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \pi \int_a^b y(x) dx < \infty,$$

для вторых слагаемых имеем:

$$\lim_{\Delta\bar{T} \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta^2 x_i = \lim_{\Delta\bar{T} \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta^2 x_i = 0.$$

Следовательно, тело F_{OY} кубируемо и его объём V_{OY} вычисляется по формуле (8), что и требовалось доказать.

Пример 9. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.



Решение. По формуле (8) имеем:

$$\begin{aligned} V_{OY} &= 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx = \\ &= 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \\ &= 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3} \\ &\text{(куб.ед)}. \end{aligned}$$

Замечание 9 (случай $a < b \leq 0$). Отметим, что объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Oy трапеций

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b \leq 0, 0 \leq y \leq y(x), y(x) \in C[a, b]\}$$

и $F = \{(x; y) \mid 0 \leq -b \leq x \leq -a, 0 \leq y \leq y(-x), y(-x) \in C[-b, -a]\}$, симметричных друг другу относительно этой оси, равны. Выполняя в интеграле (8) замену $t = -x$, получим, что

$$V_{OY} = 2\pi \int_{-b}^{-a} (-x) \cdot y(-x) d(-x) = 2\pi \int_a^b |x| \cdot y(x) dx. \quad (9)$$

Формулой (9) можно пользоваться как в случае

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y(x) \in C[a, b]\},$$

так и в случае

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b \leq 0, 0 \leq y \leq y(x), y(x) \in C[a, b]\}.$$

Замечание 10 (случай неположительной функции $y(x)$). Легко видеть, что тела, полученные при вращении вокруг оси Oy каждой из двух криволинейных трапеций

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\}$$

и

$$F_- = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, -y(x) \leq y \leq 0, y \in C[a, b]\}$$

симметричны друг другу относительно оси Ox , поэтому их объёмы равны.

В подобных ситуациях для получения формулы, пригодной в любом из двух случаев, когда функция $y(x)$ не меняет знака на $[a, b]$, в подынтегральном выражении в формуле (8) достаточно заменить $y(x)$ на $|y(x)|$.

Таким образом, имеем, что для криволинейных трапеций любого из видов

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y \in C[a, b]\}$$

или

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, y(x) \leq y \leq 0, y \in C[a, b]\},$$

(не пересекающих оси вращения Oy), верна следующая формула для вычисления объёма соответствующего тела вращения:

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x \cdot |y(x)| dx. \quad (10)$$

Обобщая, получим, что как в условиях замечания 9, так и в условиях замечания 10 для вычисления объёма тела вращения можно пользоваться формулой

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b |x \cdot y(x)| dx. \quad (11)$$

Замечание 11 (случай криволинейной трапеции общего вида, заданной стандартно относительно оси Ox).

Объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции любого из двух видов

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), y_1, y_2 \in C[a, b]\}$$

или

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b \leq 0, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), y_1, y_2 \in C[a, b]\}$$

вокруг оси Oy , вычисляется по формуле

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b |x| (y_2(x) - y_1(x)) dx. \quad (12)$$

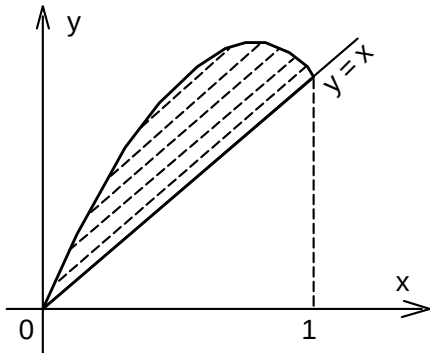
Пример 10. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = 2x - x^3$ ($x \geq 0$).

Решение. Данная фигура является стандартной относительно оси Ox :

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x - x^3\},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} V_{OY} &= 2\pi \int_a^b x (y_2(x) - y_1(x)) dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 x (2x - x^3 - x) dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{4\pi}{15} \text{ (куб.ед)}. \end{aligned}$$



Замечание 12 (случай криволинейной трапеции, расположенной стандартно относительно оси Ox и ограниченной кривой, заданной параметрически).

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a, b]$ ($0 \leq a < b$) функции $y = y(x)$, обращающейся на концах этого сегмента в нуль, и снизу – отрезком оси Ox от a до b :

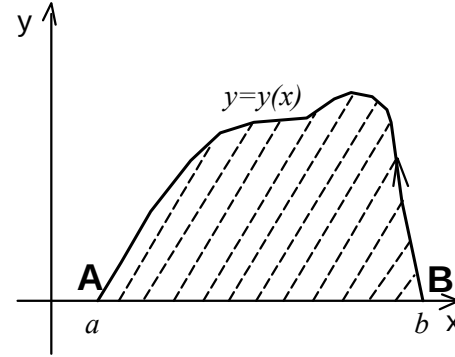
$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x), y(a) = y(b) = 0\}.$$

Пусть, кроме того, график функции $y(x)$ допускает параметризацию с

помощью уравнений $x = x(t), y = y(t), t \in [T_0, T]$,

$$x(T_0) = b, x(T) = a,$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T]$, и при изменении параметра t от T_0 до T точка $(x(t); y(t))$ движется по кривой так, что криволинейная трапеция остаётся слева (т.е. от точки



$B(x(T_0); 0)$ к точке $A(x(T); 0)$, см. рисунок).

Перейдём в подынтегральном выражении в формуле (8) к переменной интегрирования t , и получим следующую формулу для вычисления объёма тела вращения для этого случая:

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx = 2\pi \int_{T_0}^T x(t) y(t) x'(t) dt = -2\pi \int_{T_0}^T x(t) y(t) x'(t) dt.$$

Обобщая последнюю формулу на случаи криволинейных трапеции любого из видов

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b \leq 0, 0 \leq y \leq y(x), y(a) = y(b) = 0\},$$

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq a \leq x \leq b, y(x) \leq y \leq 0, y(a) = y(b) = 0\},$$

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b \leq 0, y(x) \leq y \leq 0, y(a) = y(b) = 0\},$$

получим

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b |x \cdot y(x)| dx = -2\pi \int_{T_0}^T |x(t) y(t) x'(t)| dt. \quad (13)$$

Пример 11. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и $y = 0$.

$$\text{Решение. } V_{OY} = -2\pi \int_{T_0}^T x(t) y(t) x'(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = \\
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = \\
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}t - 2t \cos t + \frac{t}{2} \cos 2t - \frac{3}{2} \sin t + \sin 2t - \frac{1}{2} \sin t \cos 2t \right) dt.
\end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left(2t \cos t + \frac{t}{2} \cos 2t - \frac{3}{2} \sin t + \sin 2t - \frac{1}{2} \sin t \cos 2t \right) dt = 0$$

(сделайте это самостоятельно), поэтому

$$V_{OY} = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}t \right) dt = 2\pi a^3 \left(\frac{3}{4}t^2 \right) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi^3 a^3 \text{ (куб.ед.)}$$

Замечание 13 (случай, когда вращаемая вокруг оси Oy область ограничена замкнутой кривой, заданной параметрически).

Пусть дана произвольная область F , не пересекающая оси Oy и ограниченная непрерывной кусочно-гладкой замкнутой кривой

$$L = \{(x; y) \mid x = x(t), y = y(t), t \in [T_0, T]; x(T_0) = x(T), y(T_0) = y(T)\},$$

где при изменении t от T_0 до T кривая L проходит так, что область F остаётся слева.

Объём тела, полученного вращением данной области вокруг оси Oy , вычисляется по формуле (13), которая остаётся справедливой и в этом случае.

Пример 12. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной петлёй кривой $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$.

Решение. Определим пределы интегрирования в формуле (13). Так как $x(0) = x(2) = 0$ и $y(0) = y(2) = 0$, то начало координат – точка самопересечения данной кривой, а, значит, при изменении значений параметра t в пределах от 0 до 2 кривая делает петлю. Далее, из вида функции $x(t)$ дополнительно определяем, что при возрастании t от 0 до 1 величина $x(t)$ также возрастает от 0 до 1, а при дальнейшем возрастании t от 1 до 2 значение $x(t)$ убывает от 1 до 0. Тогда, учитывая неотрицательность $x(t)$, $y(t)$, получим

$$\begin{aligned}
V_{OY} &= 2\pi \int_0^1 |x(t)y(t)| dx(t) - 2\pi \int_1^2 |x(t)y(t)| dx(t) = \\
&= -2\pi \int_0^2 (2t - t^2)(4t - t^3) 2(1-t) dt = \\
&= 4\pi \int_0^2 (t^6 - 3t^5 - 2t^4 + 12t^3 - 8t^2) dt = \\
&= 4\pi \left(\frac{2^7}{7} - \frac{2^6}{2} - 2 \cdot \frac{2^5}{5} + 3 \cdot 2^4 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 \right) = \frac{64\pi}{105} \text{ (куб.ед.)}.
\end{aligned}$$

Для решения задачи можно было воспользоваться формулой (7) (см. пример 8 выше).

7.5.3. Вращение вокруг оси, не совпадающей ни с одной из координатных осей

Если тело образовано вращением области F вокруг произвольной оси, не пересекающей область F и не являющейся одной из осей координат, то для вычисления объёма полученного тела необходимо сделать замену системы координат так, чтобы в новой системе одна из координатных осей совпала с осью вращения. В частности,

а) если осью вращения является прямая $y = l$, не пересекающая область

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

то объём V_l тела F_l , полученного вращением F вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$V_l = \pi \int_a^b |(f_2 - l)^2 - (f_1 - l)^2| dx. \quad (14)$$

Эта формула получается переносом осей координат так, чтобы ось l стала новой осью Ox_1 . Для этого введём новые координаты $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y - l \end{cases}$. Тогда

фигура F в новой системе координат задаётся как множество точек

$$F = \{(x_1; y_1) \mid a \leq x_1 \leq b, f_1(x_1) - l \leq y_1 \leq f_2(x_1) - l\},$$

и для объёма тела вращения F_l имеем

$$V_l = \pi \int_a^b |(f_2(x_1) - l)^2 - (f_1(x_1) - l)^2| dx_1 =$$

$$= \pi \int_a^b |(f_2(x) - l)^2 - (f_1(x) - l)^2| dx;$$

б) если осью вращения является прямая $x = p$, не пересекающая область

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

то объём тела F_p , полученного вращением F вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$V_p = 2\pi \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) |x - p| dx. \quad (15)$$

В самом деле, перейдём к координатам $\begin{cases} x_1 = x - p \\ y_1 = y \end{cases}$. Тогда область F в

новой системе координат задаётся следующим образом

$$F = \{(x_1; y_1) \mid a - p \leq x_1 \leq b - p, f_1(x_1 + p) \leq y_1 \leq f_2(x_1 + p)\},$$

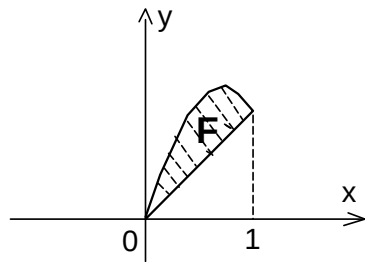
и объём находится по формуле (12):

$$V_p = 2\pi \int_{a-p}^{b-p} (f_2(x_1 + p) - f_1(x_1 + p)) |x_1| dx_1 = 2\pi \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) |x - p| dx.$$

Пример 13. Найти объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y = x$, $y = 2x - x^3$ ($y \geq 0$)

а) вокруг прямой $y = -1$; б) вокруг прямой $x = -1$;

Решение. а) Воспользуемся формулой (14):



$$V = \pi \int_0^1 |(2x - x^3 + 1)^2 - (x + 1)^2| dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x) dx =$$

$$= \frac{59\pi}{70} \text{ (куб.ед.)}$$

б) Воспользуемся формулой (15):

$$V = 2\pi \int_0^1 ((2x - x^3) - x) |x + 1| dx = 2\pi \int_0^1 ((2x - x^3) - x)(x + 1) dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-x^4 - x^3 + x^2 + x) dx = 2\pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{23\pi}{30}$$

(куб.ед).

Пример 14. Найти объём тела, полученного вращением вокруг прямой $y = 2a$ криволинейной трапеции, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и прямой $y = 0$.

Решение. Вращаемая фигура имеет вид криволинейной трапеции

$$F = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 2\pi a, 0 \leq y \leq y(x)\}.$$

Переходя в интеграле к переменной t , по формуле (14) получим

$$V_{y=2a} = \pi \int_0^{2\pi a} |(y(x) - 2a)^2 - (0 - 2a)^2| dx =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} ((2a)^2 - (y(t) - 2a)^2) dx(t) =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (4a^2 - (a(1 - \cos t) - 2a)^2) a(1 - \cos t) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (4 - (1 + \cos t)^2) (1 - \cos t) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{2} - \frac{17}{4} \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 3t \right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{7t}{2} - \frac{17}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{12} \sin 3t \right) \Big|_0^{2\pi} = 7\pi^2 a^3 \text{ (куб.ед.)}$$

7.6. Объём тела вращения в полярных координатах

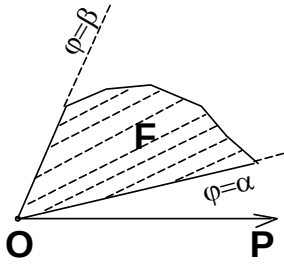
Обратимся к вычислению объёмов тел вращения в случаях, когда границы вращаемых фигур заданы в полярных координатах.

7.6.1. Переход от полярных координат к прямоугольным координатам

Пусть в полярной системе координат с центром в точке O и полярной осью OP дан криволинейный сектор

$$F = \{(r; \varphi) \mid 0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, 0 \leq r \leq r(\varphi)\},$$

$r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, который вращается вокруг полярной оси OP (кривая $r = r(\varphi)$ проходит так, что сектор F остаётся слева).



Полагая $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$, перейдём к декартовой системе координат Oxy , совмещённой с полярной, и воспользуемся формулой (3), в которой роль параметра t будет играть величина угла φ . Тогда получим, что объём соответствующего тела вращения может быть найден по формуле

$$V_{OX} = V_{OP} = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(\varphi) x'(\varphi) d\varphi. \quad (16)$$

Пример 1. Найти объём тела, полученного при вращении области, ограниченной кривой $r = a \sin 3\varphi$, $a > 0$, и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/3$, вокруг полярной оси.

Решение. Так как $x(\varphi) = a \sin 3\varphi \cos \varphi$, $y(\varphi) = a \sin 3\varphi \sin \varphi$ и при изменении параметра φ от 0 до $\pi/3$ эта кривая проходит так, что вращаемая область остаётся слева, то по формуле (16) имеем

$$\begin{aligned} V_{OP} &= -\pi \int_0^{\pi/3} y^2(\varphi) x'(\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{\pi a^3}{4} \int_0^{\pi/3} (\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)^2 (2 \cos 4\varphi + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\pi a^3}{8} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{3}{2} \cos 2\varphi - 3 \cos 4\varphi + \frac{3}{2} \cos 6\varphi + \frac{3}{2} \cos 10\varphi - \cos 12\varphi \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi a^3}{8} \left(\frac{3}{4} \sin 2\varphi - \frac{3}{4} \sin 4\varphi + \frac{3}{20} \sin 10\varphi \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{27\pi a^3 \sqrt{3}}{320} \text{ (куб.ед.)}$$

7.6.2. Вычисление объёма непосредственно в полярных координатах

В этой же ситуации можно воспользоваться формулой, выражающей объём тела, полученного вращением указанного выше криволинейного сектора относительно полярной оси, без перехода к декартовой системе координат.

Теорема 3. Пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$. Тогда тело F_{OP} , образованное вращением вокруг полярной оси криволинейного сектора

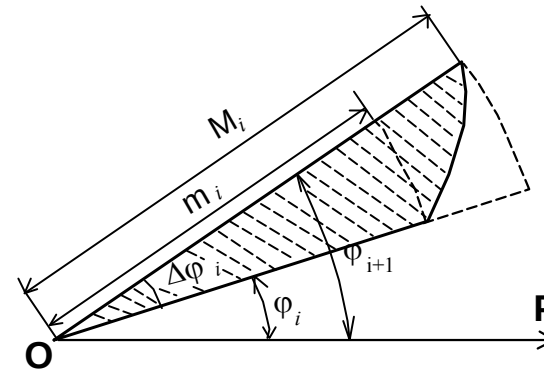
$$F = \{(r; \varphi) \mid 0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, 0 \leq r \leq r(\varphi)\},$$

кубируемо, и его объём V_{OP} может быть вычислен по формуле

$$V_{OP} = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $\bar{T}$ – произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ на части точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n = \beta.$$



Рассмотрим плоскую фигуру F_i , ограниченную лучами $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ и частью кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$.

$$\text{Пусть } M_i = \sup_{\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}} r(\varphi),$$

$$m_i = \inf_{\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}} r(\varphi).$$

Рассмотрим теперь два тела Q_i и P_i , образованные вращением криволинейных секторов, ограниченных лучами $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ и дугами окружностей соответственно радиусов $r = M_i$, $r = m_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Обозначим через F_{OP}^Q и F_{OP}^P объединение всех тел Q_i и P_i соответственно. Очевидно, тело F_{OP} , образованное вращением F вокруг полярной оси, содержится в теле F_{OP}^Q и содержит в себе тело F_{OP}^P . Учитывая, что объём шарового сектора вычисляется по формуле $V = \frac{2\pi}{3} \pi R^2 h$, где h – высота шарового сегмента, принадлежащего шаровому сектору, R – радиус шара, находим объёмы V_{OP}^Q , V_{OP}^P тел F_{OP}^Q и F_{OP}^P :

$$V_{OP}^Q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\pi}{3} M_i^3 (\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i+1}) = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin \frac{\Delta \varphi_i}{2};$$

$$V_{OP}^P = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\pi}{3} m_i^3 (\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i+1}) = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin \frac{\Delta \varphi_i}{2}.$$

При достаточно мелком разбиении $\bar{T}$ верно:

$$\sin \frac{\Delta \varphi_i}{2} = \frac{\Delta \varphi_i}{2} + o(\Delta \varphi_i^2), \quad \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} = \sin \bar{\varphi}_i, \quad \text{где } \varphi_i \leq \bar{\varphi}_i \leq \varphi_{i+1}.$$

Очевидно,

$$V_{OP}^Q = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin \bar{\varphi}_i \cdot \Delta \varphi_i + \hat{\gamma}_i \leq$$

$$\leq \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin \bar{\varphi}_i \cdot \Delta \varphi_i + \hat{\gamma} = S(\bar{T}) + \hat{\gamma}_i;$$

$$V_{OP}^P = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin \bar{\varphi}_i \cdot \Delta \varphi_i + \check{\gamma}_i \geq$$

$$\geq \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin \bar{\varphi}_i \cdot \Delta \varphi_i + \check{\gamma} = s(\bar{T}) + \check{\gamma}_i,$$

где $\hat{\gamma}_i \rightarrow 0$ и $\check{\gamma}_i \rightarrow 0$ при $\Delta \varphi_i \rightarrow 0$; $\sin \bar{\varphi}_i = \max_{\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}} \sin \varphi$,
 $\sin \bar{\varphi}_i = \min_{\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}} \sin \varphi$.

Легко видеть, что $S(\bar{T})$ и $s(\bar{T})$ есть соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу интегрируемой на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции $\frac{2\pi}{3} r^3(\varphi) \sin \varphi$, поэтому, уменьшая диаметр разбиения за счёт измельчения ячеек разбиения, можно добиться того, что

$$S(\bar{T}) - s(\bar{T}) < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – любое наперёд заданное число.

Таким образом, тело F_{OP} – кубируемо. Из неравенств

$$s(\bar{T}) + \check{\gamma}_i \leq V_{OP}^P \leq V_{OP} \leq V_{OP}^Q \leq S(\bar{T}) + \hat{\gamma}_i$$

заключаем, что объём тела F_{OP} может быть вычислен по формуле (17), поскольку $S(\bar{T})$ и $s(\bar{T})$ при неограниченном уменьшении диаметра разбиения сколь угодно мало отличаются друг от друга (а, следовательно, и от значения этого интеграла). Формула (17) доказана.

Пример 2. Найти объём тела, полученного при вращении области, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$, ($a > 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) вокруг полярной оси.

Решение. Кардиоида симметрична относительно полярной оси, поэтому интегрировать в формуле (17) будем в пределах от 0 до π :

$$V_{OP} = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 d(\cos \varphi) =$$

$$= -\frac{\pi a^3}{6} (1 + \cos \varphi)^4 \Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3} \pi a^3 \text{ (куб.ед.)}$$

Пример 3. Найти объём тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $\varphi = \pi r^3$, $\varphi = \pi$, вокруг полярной оси.

Решение. Выражая явно $r = \sqrt[3]{\frac{\varphi}{\pi}}$ и определяя пределы интегрирования ($\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$), по формуле (17), интегрируя по частям, находим:

$$V_{OP} = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ (куб.ед.)}$$

7.6.3. Случай вращения вокруг луча $\varphi = \pi/2$

Пусть теперь криволинейный сектор

$$F = \{(r; \varphi) \mid -\pi/2 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$$

вращается вокруг прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси (в декартовой прямоугольной системе координат, совмещённой с полярной, это ось Oy). Действуя аналогично рассмотренному в п. 7.6.1, получим следующую формулу для вычисления объёма тела вращения:

$$V_{OY} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(\varphi) y'(\varphi) d\varphi, \quad (18)$$

где $x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$, $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$.

Пример 4. Найти объём тела, полученного при вращении области, ограниченной кривой $r = a \sin 3\varphi$, $a > 0$, и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/3$, вокруг оси $\varphi = \pi/2$.

Решение. Воспользуемся формулой (18): $V_{OY} = \pi \int_0^{\pi/3} x^2(\varphi) y'(\varphi) d\varphi =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi a^3}{4} \int_0^{\pi/3} (\sin 2\varphi + \sin 4\varphi)^2 (2 \sin 4\varphi - \sin 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\pi a^3}{8} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{3}{2} \sin 2\varphi + 3 \sin 4\varphi + 2 \sin 6\varphi - \frac{3}{2} \sin 10\varphi - \sin 12\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{\pi a^3}{8} \left(-\frac{3}{4} \cos 2\varphi - \frac{3}{4} \cos 4\varphi + \frac{3}{20} \cos 10\varphi \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{81\pi a^3}{40} \text{ (куб.ед)}. \end{aligned}$$

7.6.4. Переход от прямоугольных координат к полярным координатам

Иногда в случае, когда кривые, ограничивающие тело вращения, заданы уравнениями в прямоугольных координатах, бывает целесообразно перейти к полярным координатам и лишь затем вычислить объём тела вращения (например, если в полярных координатах уравнение кривой выглядит проще, чем в прямоугольных).

Пример 5. Найти объём тела, полученного вращением области, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

Решение. а) Перейдём к полярным координатам, совмещённым с прямоугольными, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. После упрощений получим полярное уравнение кривой: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Учитывая симметрию точек плоской фигуры относительно осей координат и применяя формулу (17), находим

$$\begin{aligned} V_{OX} &= 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} (a\sqrt{\cos 2\varphi})^3 \sin \varphi d\varphi = -\frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} (2 \cos^2 \varphi - 1)^{3/2} d \cos \varphi = \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (z^2 - 1)^{3/2} dz = \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{z}{4} (z^2 - 1)^{3/2} - \frac{3}{8} z \sqrt{z^2 - 1} + \frac{3}{8} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) = \frac{\pi a^3}{4} \left(\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right) \text{ (куб.ед)}. \end{aligned}$$

б) Запишем уравнение кривой в полярных координатах: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Перейдём к новым полярным координатам, принимая луч $\varphi = \pi/2$ за новую полярную ось: $\varphi_1 = \varphi - \frac{\pi}{2}$, $r_1(\varphi_1) = r(\varphi)$. Тогда по формуле (17), учитывая симметрию кривой, находим

$$\begin{aligned} V_{O_1P_1} &= 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r_1^3(\varphi_1) |\sin \varphi_1| d\varphi_1 = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos 2\varphi)^{3/2} \left| \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right| d\varphi = \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos 2\varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} (1 - 2 \sin^2 \varphi)^{3/2} d(\sqrt{2} \sin \varphi) = \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^1 (1 - z^2)^{3/2} dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}} \text{ (куб.ед)}. \end{aligned}$$

7.6.5. Случай вращения вокруг произвольной прямой

Если вращение осуществляется вокруг произвольной прямой, то обычно переходят к новым координатам, причём это можно сделать как в прямоугольной, так и в полярной системах координат. Рассмотрим пример.

Пример 6. Найти объём тела, полученного при вращении области, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$, ($a > 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) вокруг прямой $r \cos \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Перейдём к новым прямоугольным координатам по формулам $x_1 = y$, $y_1 = -x - \frac{a}{4}$ (в первоначальной системе координат фигура вращается вокруг прямой $x = \pi/4$, а в новой системе координат вращение осуществляется вокруг оси O_1x_1). Учитывая симметрию фигуры относительно

оси O_1y_1 , получаем $V_{O_1x_1} = 2\pi \int_0^{\frac{3\sqrt{3}a}{4}} y_1^2 dx_1$ (здесь учтено, что при возрастании φ от 0 до $\pi/2$ значение x_1 возрастает от 0 до $3\sqrt{3}a/4$, а при возрастании φ от $\pi/2$ до π значение x_1 убывает от $3\sqrt{3}a/4$ до 0).

Запишем параметрические уравнения кривой (в качестве параметра берётся угол φ):

$$x_1(\varphi) = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi, \quad y_1 = -\left(\frac{a}{4} + a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi\right).$$

Тогда для объёма получаем

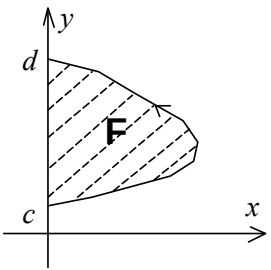
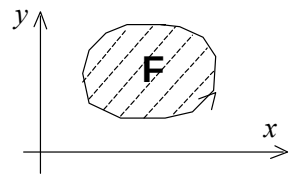
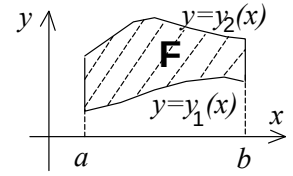
$$V_{O_1x_1} = 2\pi a^3 \int_0^{\pi} \left((1 + \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{1}{4} \right)^2 (\cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi.$$

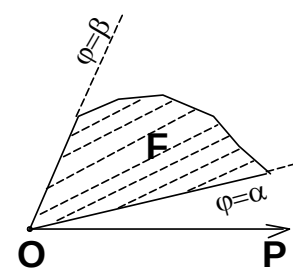
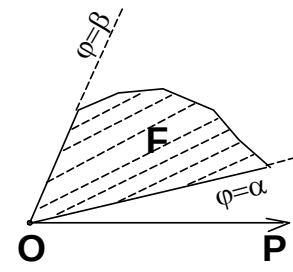
В громоздком подынтегральном выражении встретятся нечётные степени $\cos x$, но поскольку $\int_0^{\pi} \cos^{2k+1} x dx = 0$, то мы не будем выписывать этих членов. Таким образом,

$$V_{O_1x_1} = 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (4 \cos^4 \varphi + 2 \cos^6 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{13}{4} \pi^2 a^3 \text{ (куб.ед.)}.$$

Собирая полученные результаты, приходим к следующей краткой сводной таблице объёмов тел вращения.

№	Область вращения	Объём тела вращения
1.	Стандартна относительно Ox : $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $y_1, y_2 \in C[a, b]$.	$V_{Ox} = \pi \int_a^b y_2^2(x) - y_1^2(x) dx$; $V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x (y_2(x) - y_1(x)) dx$;
2.	Стандартна относительно Oy : $c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, $x_1, x_2 \in C[c, d]$.	$V_{Ox} = 2\pi \int_c^d y (x_2(y) - x_1(y)) dy$; $V_{Oy} = \pi \int_c^d x_2^2(y) - x_1^2(y) dy$;
3.	Стандартна относительно оси Ox и прилегает к Ox ; кривая обходится в положительном направлении (область остаётся слева) и задана параметрически: $x = x(t), y = y(t)$, $x(T_0) = b, x(T) = a$.	$V_{Ox} = -\pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt$; $V_{Oy} = \pi \int_{T_0}^T x^2(t) y'(t) dt$; $V_{Ox} = 2\pi \int_{T_0}^T x(t)y(t) y'(t) dt$; $V_{Oy} = -2\pi \int_{T_0}^T x(t)y(t) x'(t) dt$;

4. Стандартна относительно оси Oy и прилегает к Oy; кривая обходится в положительном направлении и задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $y(T_0) = c$, $y(T) = d$. 	$V_{OX} = -\pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt;$ $V_{OY} = \pi \int_{T_0}^T x^2(t) y'(t) dt;$ $V_{OX} = 2\pi \int_{T_0}^T x(t)y(t) y'(t) dt;$ $V_{OY} = -2\pi \int_{T_0}^T x(t)y(t) x'(t) dt;$
5. Замкнутый контур, ограничивающий область, задан параметрически и обходится в положительном направлении: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, $x(T_0) = x(T)$, $y(T_0) = y(T)$. 	$V_{OX} = -\pi \int_{T_0}^T y^2(t) x'(t) dt;$ $V_{OY} = \pi \int_{T_0}^T x^2(t) y'(t) dt;$ $V_{OX} = 2\pi \int_{T_0}^T x(t)y(t) y'(t) dt;$ $V_{OY} = -2\pi \int_{T_0}^T x(t)y(t) x'(t) dt;$
6. Стандартная относительно оси Ox область $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, вращается вокруг не пересекающих её прямых $y = l$ или $x = p$. 	$V_l = \pi \int_a^b (y_2 - l)^2 - (y_1 - l)^2 dx;$ $V_p = 2\pi \int_a^b (y_2 - y_1) x - p dx;$

7. Криволинейный сектор $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq r \leq r(\varphi)$, вращается вокруг полярной оси (кривая $r = r(\varphi)$ проходится так, что сектор остаётся слева): 	$V_{OP} = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \sin \varphi d\varphi;$ $V_{OX} = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(\varphi) x'(\varphi) d\varphi,$ где $x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$, $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$.
8. Криволинейный сектор $-\pi/2 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq r(\varphi)$, вращается вокруг оси $\varphi = \pi/2$ (кривая $r = r(\varphi)$ проходится так, что сектор остаётся слева): 	$V_{OY} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(\varphi) y'(\varphi) d\varphi,$ где $x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$, $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$.

Отметим, что приведённые формулы справедливы и для областей, не являющихся стандартными относительно любой из осей координат.

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к §7

Задачи на вычисление объёмов по поперечным сечениям тел

1. Найдите объём усечённого конуса, основания которого являются эллипсами с полуосями A, B и a, b , а высота равна h .

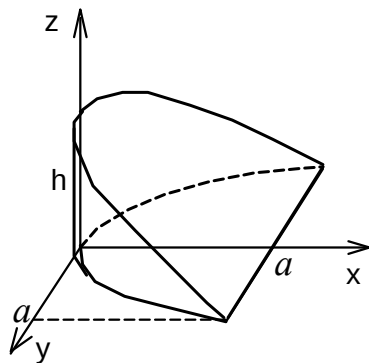
2. Найдите объём параболоида, полученного вращением параболы $y = ax^2$ вокруг оси Oy , если его основание равно S , а высота равна H .

3. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ ($0 < z < a$).

4. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

5. Найдите объём шара радиуса R (через площадь поперечного сечения).

6. Найдите объём тела, ограниченного плоскостями $x = 1$, $x = 3$, если площадь его поперечного сечения обратно пропорциональна квадрату расстояния сечения от начала координат, а при $x = 2$ площадь сечения равна 27.



7. Найдите объём цилиндрического клина, вырезанного из прямого кругового цилиндра, по его размерам, указанным на рисунке (задача Архимеда).

8. В цилиндрический стакан с водой вложен параболоид вращения вершиной вниз. Основание и высота параболоида совпадают с основанием и высотой цилиндра. Найдите объём оставшейся в стакане воды, если радиус основания равен R , а высота равна h .

Задачи на вычисление объёмов тел вращения

Найдите объёмы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении следующих кривых, заданных явным образом в прямоугольной системе координат, вокруг указанной оси:

9. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$), вокруг оси Ox (нейлоид).

10. $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = -1$; г) вокруг прямой $y = 1$; д) вокруг прямой $x = -1$.

11. $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $x = \pm \pi/2$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

12. $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

13. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, вокруг оси Oy .

14. $y = e^x - 1$, $y = 2$, $x = 0$: а) вокруг оси Oy ; б) вокруг прямой $y = 2$.

15. $y = \sec x$, $y = 0$, $x = \pm \pi/4$, вокруг оси Ox .

16. $y = x^2$, $y = 2x$, вокруг оси Ox .

17. $y^2 = x$, $x^2 = y$, вокруг оси Ox .

18. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, вокруг оси Oy .

19. $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 1$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

20. $y = x^2/2$, $y = x^3/8$, вокруг оси Ox .

21. $y^2 = 2px$, $x = p$, вокруг оси Ox .

22. $y^3 - y = x$, $x = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

23. $y = ach \frac{x}{a}$, $x = \pm a$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

24. $y = h\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = h$ (параболоид вращения), вокруг оси Oy .

25. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = \pm 1$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси сим-

метрии; в) относительно прямой $y = 1$.

26. $y = 64/(x^2 + 16)$, $x^2 = 8y$, вокруг оси Ox .

27. $y = x(3 - x)$, $y = x$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = x$.

Найдите объёмы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении следующих кривых, заданных неявным образом в прямоугольной системе координат, вокруг указанной оси:

28. $2y^2 = x^3$, $x = 4$, вокруг оси Ox .
29. $x^3 = y^2$, $x = 0$, $y = -1/27$, $y = 8$, вокруг оси Oy .
30. $y^2 = (x-1)^3$, $x = 2$, вокруг оси Ox .
31. $y^3 = 4x^2$, $y = 2$, вокруг оси Oy .
32. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси Ox .
33. $y^2 + x^4 = x^2$, вокруг оси Ox .
34. $x^2 + y^4 = y^2$, вокруг оси Oy .
35. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$), вокруг оси Oy .
36. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$), вокруг оси Ox .
37. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола), $y = \pm 2b$, вокруг оси Oy .
38. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс), вокруг оси Oy .
39. Найдите объём шара радиуса R (как тела вращения).
40. Найдите объём прямого кругового конуса с высотой, равной h , и радиусом основания R .
41. Определите объём тора (тела, полученного вращением круга радиуса R вокруг не пересекающей его оси). Расстояние от центра круга до оси равно d .
42. Найдите объём тела, полученного при вращении круга радиуса a относительно прямой, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстояние b ($b > a$).
43. Дан круг радиуса a и прямая, лежащая в плоскости круга на расстоянии b от центра ($0 < b < a$). Найдите объём тела, полученного при вращении вокруг этой прямой каждой из частей круга, на которые его делит данная прямая.
44. Найдите объём тела, полученного при вращении параболического сектора с основанием $2a$ и высотой H : а) вокруг основания; б) вокруг оси симметрии; в) вокруг касательной, проведённой через вершину сектора.
45. Найдите объём тела, полученного при вращении части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей между прямыми $y = h$ и $y = -h$ ($0 < h < b$), вокруг вертикальной оси симметрии.

46. Найдите объём тела, полученного при вращении фигуры, являющейся общей частью кругов $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2ay$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг прямой $y = x$.

Найдите объёмы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении следующих кривых, заданных параметрически в прямоугольной системе координат, вокруг указанной оси:

47. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, вокруг оси Ox .
48. $x = t$, $y = t^2$, $y = 4$, вокруг оси Oy .
49. $x = t^3$, $y = t^2$, $x = \pm 1$, вокруг оси Ox .
50. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .
51. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, вокруг прямой $x = a$.
52. $x = a \sin t$, $y = a \sin 2t$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $x = a$; г) вокруг прямой $y = a$.
53. $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси симметрии; в) вокруг прямой $y = 2a$.
54. $x = 2a \sin 2t$, $y = 2a \cos t$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .
55. Найдите объём тела, полученного при вращении области, ограниченной петлёй кривой $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг прямой $x = a$; в) вокруг прямой $x = -a$.

Найдите объёмы тел, образованных вращением областей, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах, вокруг полярной оси:

56. $r = a(1 + \sin^2 \varphi)$. 57. $r = a \cos^2 \varphi$. 58. $r = a|\sin 2\varphi|$.
59. $r = ae^{2\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.
60. Найдите объём тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда $r = a\varphi$ ($a > 0; 0 \leq \varphi \leq \pi$), вокруг полярной оси.

Разные задачи на вычисление объёмов тел

61. Пространственное тело T_r состоит из всех точек, находящихся на расстоянии не большем r от данного выпуклого многогранника S . Пусть $V(r)$ – объём этого тела. Найдите $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{V(r)}{r^3}$.

§ 8.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

8.1. Понятие кривой поверхности и способы её задания.

Гладкая поверхность. Одно- и двусторонние поверхности

Поверхность – одно из основных геометрических понятий. В школьном курсе геометрии рассматриваются плоскости, многогранники, а также некоторые кривые поверхности (конуса, цилиндра, шара). При этом каждая из кривых поверхностей определяется специальным способом, чаще всего как множество точек, удовлетворяющих определённым условиям. Так, поверхностью шара называют множество (геометрическое место) точек, отстоящих на заданном расстоянии от данной точки пространства. Понятие поверхности лишь поясняется, а не определяется. Например, говорят, что поверхность есть граница тела или след движущейся линии.

Математическое строгое определение поверхности основывается на понятиях *топологии*¹. При этом основным является понятие *простой поверхности*, которую можно представить как кусок плоскости, подвергнутый непрерывным деформациям (растяжениям, сжатиям и изгибаниям). Более точно, простой поверхностью называют образ гомеоморфного отображения (т.е. взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения) внутренности квадрата.

Теория поверхностей изучается, как правило, позже – на втором году обучения в университетах (на факультетах с углублённой математической подготовкой или на спец. курсах), когда уже пройдены кратные и поверхностные интегралы, позволяющие вычислять площади кривых поверхностей. Поэтому сейчас мы не ставим перед собой цели подробного рассмотрения основ теории поверхностей, а лишь акцентируем внимание на некоторых важных её аспектах, в первую очередь связанных с вычислением площадей простейших поверхностей – поверхностей вращения. Тем не менее, в порядке введения в этот раздел считаем полезным рассмотреть основные термины и понятия, касающиеся видов поверхностей и их площади.

Рассмотрим определение и способы задания поверхностей в пространстве.

¹ *Топология* – раздел математики (геометрии), занимающийся исследованием математическими средствами понятия и свойств непрерывности в широком смысле.

Пусть в трёхмерном пространстве введена декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. *Кривой поверхностью*, или просто *поверхностью*, назовём множество всех точек M , координаты x, y и z которых определяются уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (1)$$

где пара чисел (u, v) есть координаты точки заданного множества Ω на плоскости с прямоугольной системой координат u, v . Аргументы u, v функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ будем называть *параметрами*. Сами функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ обычно предполагаются непрерывными на Ω .² В качестве множества Ω значений параметров u, v могут выступать открытые и замкнутые, ограниченные и неограниченные множества точек плоскости.

Точка $M(x; y; z)$ называется *кратной точкой* поверхности, если имеются по крайней мере две различные пары (u, v) и $(u'; v')$ значений параметров такие, что $x(u, v) = x(u', v')$, $y(u, v) = y(u', v')$, $z(u, v) = z(u', v')$. Точки поверхности, не являющиеся кратными, называются *простыми* (регулярными) точками этой поверхности.

Поверхность, задаваемая параметрическими уравнениями (1), называется *простой*, если функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ являются непрерывными, причём различным точкам (u, v) и $(u'; v')$ соответствуют различные точки $(x; y; z)$ и $(x'; y'; z')$ поверхности. Примером простой поверхности является полусфера.

Замечание 1. Помимо задания тремя параметрическими уравнениями, поверхность в декартовом пространстве может быть задана также с помощью одного уравнения, не разрешённого относительно ни одной из переменных:

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

² Задание на множестве Ω трёх скалярных функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ равносильно заданию вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ двух вещественных переменных u, v , где $\vec{r} = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$. При этом равенство $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ называется *векторным уравнением* поверхности.

В этом случае говорят о *неявном задании поверхности*³. Если параметрические уравнения поверхности заданы, то исключение параметров u, v из этих уравнений приводит к одному соотношению между x, y и z указанного вида (2).

Пример. Параметрические уравнения

$$x = R \sin u \cos v, \quad y = R \sin u \sin v, \quad z = R \cos u,$$

где $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v < 2\pi$, R – положительное число, определяют сферу радиуса R с центром в начале координат. Исключение параметров u, v из данных трёх параметрических уравнений приводит к неявному уравнению сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Замечание 2. Если уравнение (2) разрешено относительно одной из переменных, т.е. если поверхность задана одним из уравнений вида

$$z = z(x, y), \quad y = y(x, z) \quad \text{или} \quad x = x(y, z),$$

то говорят, что поверхность задана *явным образом*.

Приведём определение *гладкой поверхности*. Пусть поверхность задаётся параметрическими уравнениями (1), где функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в некоторой ограниченной замкнутой области Ω на плоскости u, v . Непрерывную границу этой области (L) будем считать состоящей из гладких кривых. Наконец, предположим, что поверхность не имеет ни кратных, ни других особых точек. Поверхность, удовлетворяющая всем перечисленным условиям, называется *гладкой*.

В [12] (стр. 462) гладкая поверхность определяется как такая поверхность, в каждой точке которой существует касательная плоскость, т.е. функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ должны быть дифференцируемы на Ω и, кроме того, в каждой точке $(u; v)$ хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (точки поверхности не являются особыми).

Различают односторонние и двусторонние поверхности. Во многих случаях эти понятия ясны интуитивно. Классическим примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса. Если поверхность ограничивает некото-

³ Уравнение может и не определять действительного геометрического образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет *мнимую поверхность* (например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ определяет мнимую сферу).

рое тело, то естественно говорить о двух её сторонах: *внутренней*, обращённой к телу, и *внешней*, обращённой к окружающему телу пространству.

Определим понятие стороны поверхности более строго. Рассмотрим для этого гладкую поверхность, ограниченную кусочно-гладким контуром. Взяв на этой поверхности произвольную точку M_0 , проведём в ней нормаль (прямую, перпендикулярную поверхности), которой припишем определённое направление – одно из двух возможных. Предположим теперь, что какова бы ни была точка M_0 и каков бы ни был замкнутый контур, проходящий через M_0 и не пересекающий границы поверхности, после обхода его мы неизменно возвращаемся в исходную точку M_0 с исходным же направлением нормали. При этих условиях поверхность называется *двусторонней*. Если же для какой-либо точки M_0 и для какого-либо проходящего через неё замкнутого контура после его обхода мы вернёмся в точку M_0 с направлением нормали, противоположным исходному, то поверхность называется *односторонней*.

В случае двусторонней поверхности выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет выбор направления нормали сразу во всех точках поверхности. Совокупность всех точек поверхности вместе с приписанными к ним направленными нормалью и называется *стороной поверхности*.

Простейшим и наиболее важным примером двусторонней поверхности является поверхность, определяемая явным уравнением $z = z(x, y)$ в предположении, что функция $z(x, y)$ непрерывна в некоторой плоской области

Ω и имеет в ней непрерывные частные производные $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Назовём *направляющими косинусами* вектора нормали к поверхности в точке $(x; y; z)$ косинусы углов α, β, γ , образованных направлением нормали с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz . Тогда направляющие косинусы могут быть вычислены по формулам

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-q}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Здесь одновременно берётся либо верхний, либо нижний знак во всех трёх равенствах; знаки «+» и «-» соответствуют двум противоположным направлениям нормали. Если выбрать перед радикалами в последних формулах знак плюс, то угол между нормалью и осью z будет острым и, следовательно, мы

выберем *верхнюю сторону* поверхности. Напротив, выбор знака минус в выражениях для направляющих косинусов (они являются одновременно координатами единичного вектора в направлении нормали) характеризует *нижнюю сторону* поверхности.

В пространстве, как и на плоскости, наряду с прямоугольной системой координат существуют различные криволинейные системы координат. Одной из наиболее известных из них является *полярная система координат*.

Совместим полюс с началом координат прямоугольной системы, направив полярную ось вдоль оси Oz . Тогда *полярные координаты* $(r; \varphi; \theta)$ точки M (другое их название – *сферические координаты*) связаны с её декартовыми координатами $(x; y; z)$ формулами:

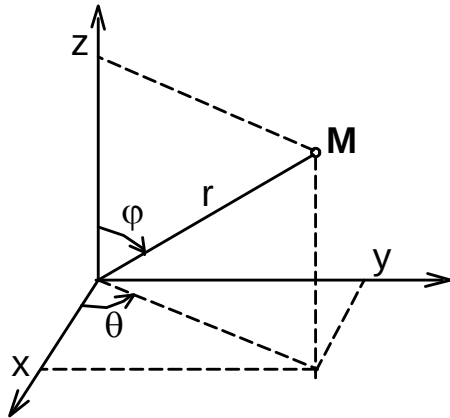
$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi, \quad (3)$$

где $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Геометрический смысл величин r, φ, θ :

r – есть длина радиус-вектора

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, соединяющего начало координат (полюс) с точкой M ; φ – угол, образованный этим вектором с положительным направлением оси Oz ; θ – угол, образованный проекцией вектора $\vec{r}$ на плоскость Oxy и положительным направлением оси Ox



(см. рис.).

Если, в частности, зафиксировать в уравнениях (3) $r = r_0$, то получим параметрические уравнения сферы радиуса r_0 с центром в начале координат (роль параметров u, v здесь выполняют переменные φ, θ). Если зафиксировать $\varphi = \varphi_0$, то получим параметрические уравнения кругового конуса (роль параметров u, v будут выполнять переменные r, θ). Наконец, если зафиксировать $\theta = \theta_0$, то получим параметрические уравнения полуплоскости, проходящей через ось Oz (на этот раз роль параметров u, v будут выполнять переменные r, φ).

8.2. Алгебраические поверхности 1-го и 2-го порядков

Напомним простейшие виды *алгебраических поверхностей* (поверхностей, задаваемых алгебраическими уравнениями).

Поверхностью 1-го порядка называется множество точек трёхмерного пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению 1-й степени:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Поверхность 1-го порядка – это плоскость.

Поверхностью 2-го порядка называется множество точек трёхмерного пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1)$$

Обратимся к *классификации* алгебраических поверхностей 2-го порядка. Для каждой поверхности 2-го порядка существует прямоугольная система координат, в которой уравнение (1) в зависимости от его коэффициентов приводится к одному из следующих *канонических видов*.

Нераспадающиеся поверхности

Невырождающиеся:

эллиптические –

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – эллипсоид,}$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ – мнимый эллипсоид;}$$

гиперболические –

$$3. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – однополостный гиперболоид,}$$

$$4. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ – двуполостный гиперболоид;}$$

параболические ($p > 0, q > 0$) –

$$5. \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \text{ – эллиптический параболоид,}$$

$$6. \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \text{ – гиперболический параболоид.}$$

Вырождающиеся:

цилиндрические –

$$7. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – эллиптический цилиндр,}$$

$$8. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ – мнимый эллиптический цилиндр,}$$

$$9. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – гиперболический цилиндр,}$$

$$10. y^2 = 2px \text{ – параболический цилиндр;}$$

конические –

$$11. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ – конус,} \quad 12. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ – мнимый конус.}$$

Распадающиеся вырождающиеся поверхности

$$13. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ – пара пересекающихся плоскостей,}$$

$$14. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ – пара мнимых пересекающихся плоскостей,}$$

$$15. x^2 = a^2 \text{ – пара параллельных плоскостей,}$$

$$16. x^2 = -a^2 \text{ – пара мнимых параллельных плоскостей,}$$

$$17. x^2 = 0 \text{ – пара совпадающих плоскостей.}$$

Пересечение поверхности 2-го порядка с плоскостью является линией 2-го порядка.

Поверхности 2-го порядка были впервые представлены уравнениями 2-й степени у Л.Эйлера (1748), современные названия невырожденных поверхностей 2-го порядка даны Г. Монжем (1801).

8.3. Квадрируемость кривой поверхности и её площадь

Понятие площади кривой поверхности имеет аналогию с понятием длины кривой линии. Длину (незамкнутой) дуги мы определяли как предел периметра вписанной в дугу ломаной – при условии, что длины всех её сторон стремятся к нулю. Возникает естественный вопрос, можно ли в случае кривой поверхности (тоже незамкнутой) рассматривать вписанную в неё многогранную поверхность и определять площадь кривой поверхности как предел пло-

щади этой многогранной поверхности – при условии, что диаметры всех граней стремятся к нулю. Оказывается, нет. В конце XIX века была обнаружена непригодность этого определения. Шварцем (Y.A.Schwarz) было показано⁴, что упомянутый предел не существует даже для простого случая поверхности прямого кругового цилиндра.

Назовём область G трёхмерного пространства *односвязной*, если любой принадлежащий ей замкнутый контур может быть непрерывно деформирован (стянут) в точку, оставаясь всё время в G .

Пусть G – односвязная область на гладкой поверхности, ограниченная кусочно-гладким контуром. Разобьём область G кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей G_i , каждая из которых однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через точку M_i , принадлежащую G_i . Предел сумм площадей этих проекций (если он существует), взятых по всем элементам разбиения, при условии, что максимальный диаметр этих элементов G_i стремится к нулю и что он не зависит от выбора точек M_i , называется *площадью области G* . При этом фигура G , расположенная на кривой поверхности, называется *квадрируемой*.

Например, квадрируемыми являются кусочно-гладкие ограниченные полные двусторонние поверхности. Площади фигур, расположенных на кривых поверхностях, обладают свойствами, аналогичными свойствам инвариантности и аддитивности площадей плоских фигур.

Для вычисления площадей кривых поверхностей, уравнения которых известны, используются, вообще говоря, так называемые поверхностные интегралы (1-го и 2-го рода) и связанные с ними кратные интегралы. Этот раздел изучается позже, обычно на 2-м году обучения в университете, поэтому сейчас мы ознакомимся лишь с наиболее простыми случаями вычисления площадей – с помощью обычных собственных и несобственных определённых интегралов.

8.4. Поверхность вращения и её площадь

Поверхности вращения составляют один из простейших классов кривых поверхностей. Для таких поверхностей общее – весьма сложное – определение площади поверхности можно заменить более простым.

Пусть на плоскости Oxy (именно, в верхней полуплоскости) имеется некоторая кривая AB , заданная параметрически уравнениями

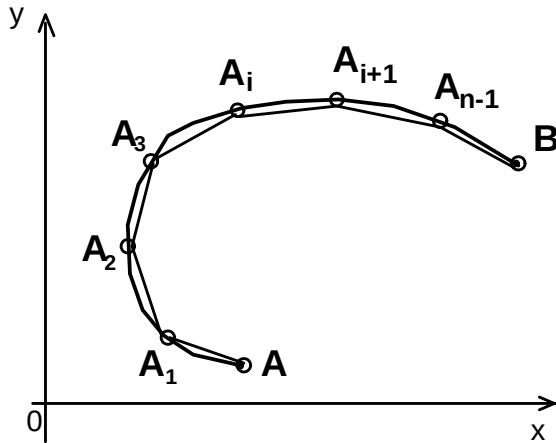
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T],$$

⁴ [18], глава XVII, §2, п. 623.

где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные на $[T_0, T]$ функции (вместе с производными $x'(t)$, $y'(t)$)⁵.

Если вращать кривую AB вокруг оси Ox , то она опишет некоторую *поверхность вращения*. Вычислим площадь этой поверхности, определив понятие площади специально для поверхности вращения. При этом будем исходить из данных ещё в школьном курсе правил вычисления боковых поверхностей цилиндра, конуса и усечённого конуса. Впоследствии у вас будет возможность убедиться в том, что полученная ниже формула вычисления площади поверхности вращения через определённый интеграл входит как частный случай в общую формулу для площади кривой поверхности (через двойной или поверхностный интегралы).

Выберем на кривой AB в направлении от A к B произвольную последовательность точек $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{n-1}, A_n = B$



и рассмотрим ломаную $AA_1A_2\dots A_{n-1}B$, вписанную в кривую.

Станем вместе с кривой вращать вокруг оси Ox эту ломаную; она опишет некоторую поверхность $S_{n,X}$, площадь которой определим по правилам элементарной геометрии.

Условимся под *площадью поверхности*, описанной вращаемой кривой, понимать

$$|S_{нов,X}| = \sup S_{n,X}$$

(здесь супремум берётся по всем разбиениям дуги AB).

Замечание. Можно показать, что в данной ситуации площадь поверхности вращения численно равна пределу площадей поверхностей $S_{n,X}$, описанных вращаемыми ломаными, при стремлении к нулю наибольшей из частичных дуг.

Рассмотрим вопрос о вычислении площадей поверхностей вращения.

8.5. Площадь поверхности вращения в декартовых координатах

8.5.1. Вращение вокруг оси Ox

Теорема 1 (случай параметрического задания кривой). Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T],$$

где $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, $y(t) \geq 0$ на сегменте $[T_0, T]$. Тогда площадь поверхности $S_{нов,X}$, полученной вращением AB вокруг оси Ox , вычисляется по формуле

$$|S_{нов,X}| = 2\pi \int_{T_0}^T y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (1)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $y'(t)$ непрерывна на сегменте $[T_0, T]$, то она равномерно непрерывна на нем. Следовательно, существует число $\delta_1 > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in [T_0, T]$, $|t_1 - t_2| < \delta_1$, выполнено:

$$|y'(t_1) - y'(t_2)| < \frac{\varepsilon}{8\pi(T - T_0) \sup_{T_0 \leq t \leq T} |y(t)|}$$

(если $\sup_{T_0 \leq t \leq T} |y(t)| = 0$, то $y(t) \equiv 0$ на сегменте $[T_0, T]$ и формула (1) очевидна).

Далее, функция $y(t)$ также равномерно непрерывна на $[T_0, T]$, значит, существует число $\delta_2 > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in [T_0, T]$, $|t_1 - t_2| < \delta_2$, выполнено:

$$|y(t_1) - y(t_2)| < \frac{\varepsilon}{8\pi(T - T_0) \sup_{T_0 \leq t \leq T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}.$$

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Пусть $\bar{T} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[T_0, T]$, $\Delta_{\bar{T}} < \delta$. Впишем в кривую AB ломаную, соответствующую этому разбиению, и вычислим площадь поверхности, полученной при вращении этой ломаной вокруг оси Ox :

⁵ Предполагаем отсутствие особых и кратных точек на кривой AB .

$$S_{n,X} = \pi \sum_{k=1}^n (y(t_{k-1}) + y(t_k)) \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2},$$

где $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$, $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$. Применив теорему Лагранжа к функциям $x(t)$ и $y(t)$ на сегменте $[t_{k-1}, t_k]$, можем переписать последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} S_{n,X} &= \pi \sum_{k=1}^n (y(t_{k-1}) + y(t_k)) \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k = \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^n y(\xi_k) \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k + \\ &+ \pi \sum_{k=1}^n (y(t_{k-1}) + y(t_k)) \left(\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \right) \Delta t_k + \\ &+ \pi \sum_{k=1}^n (y(t_{k-1}) + y(t_k) - 2y(\xi_k)) \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k, \quad (*) \end{aligned}$$

где $\xi_k, \eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$.

Первое слагаемое в правой части последнего равенства представляет собой интегральную сумму для функции $2\pi y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ на сегменте $[T_0, T]$. Так как данная функция непрерывна на этом сегменте, то она интегрируема на нем; следовательно, существует число $\delta_3 \in (0, \delta)$ такое, что

$$\left| 2\pi \sum_{k=1}^n y(\xi_k) \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta x_k - 2\pi \int_{T_0}^T y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $\Delta_{\bar{T}} < \delta_3$.

Перейдём ко второму слагаемому. Воспользовавшись числовым неравенством

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|$$

(см. лемму 1 пункта 6.3.1 параграфа 6), получим, что

$$\begin{aligned} \left| \pi \sum_{k=1}^n (y(t_{k-1}) + y(t_k)) \left(\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \right) \Delta t_k \right| &\leq \\ &\leq 2\pi \sup_{T_0 \leq t \leq T} |y(t)| \sum_{k=1}^n |y'(\eta_k) - y'(\xi_k)| \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

в силу равномерной непрерывности функции $y'(t)$ на сегментах $[t_{k-1}, t_k]$.

Наконец, оценим последнее слагаемое в соотношении (*). Пусть

$$M = \sup_{T_0 \leq t \leq T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left| \pi \sum_{k=1}^n (y(t_{k-1}) + y(t_k) - 2y(\xi_k)) \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k \right| &\leq \\ &\leq \pi M \sum_{k=1}^n |y(t_{k-1}) + y(t_k) - 2y(\xi_k)| \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

в силу равномерной непрерывности функции $y(t)$ на сегментах $[t_{k-1}, t_k]$.

$$\text{Мы доказали, что } \left| S_{n,X} - 2\pi \int_{T_0}^T y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| < \varepsilon, \text{ если}$$

диаметр разбиения $\Delta_{\bar{T}}$ достаточно мал. Это означает, согласно определению, что площадь поверхности вращения кривой AB вокруг оси Ox вычисляется по формуле (1). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При вращении вокруг оси Ox графика функции, не обладающей свойством неотрицательности, для вычисления площади образуемой при этом поверхности используется формула

$$|S_{нов,X}| = 2\pi \int_{T_0}^T |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (1')$$

Замечание 2. Если теперь сделать в последнем интеграле замену переменной

$$l(t) = \int_{T_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

соответствующую натуральной параметризации кривой (т.е. взять в качестве параметра переменную длину дуги l , отсчитываемую от точки $A(T_0)$), то получим:

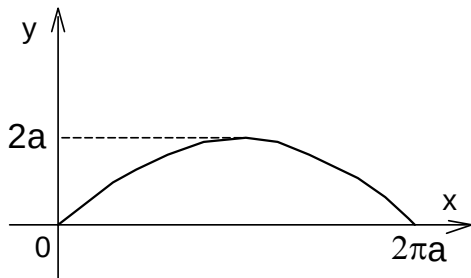
$$|S_{нов,X}| = 2\pi \int_{T_0}^T |y| dl,$$

где $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ – дифференциал дуги.

В общем случае, учитывая, что переменная длина дуги l принимает значения $0 \leq l \leq L$ (здесь L – длина всей дуги AB), имеем следующую формулу для вычисления площади поверхности вращения:

$$|S_{\text{нов},X}| = 2\pi \int_0^L |y| dl. \quad (2)$$

Пример 1. Найти площадь поверхности, образованной вращением арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0; 0 \leq t \leq 2\pi$) вокруг оси Ox .

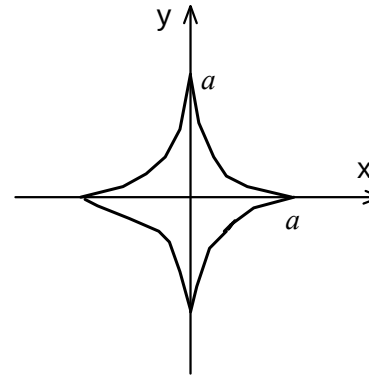


Решение.
Согласно формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} |S_{\text{нов},X}| &= 2\pi \int_{T_0}^T |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{\sin^2(t/2)} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) |\sin(t/2)| dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3(t/2) dt = \\ &= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(t/2)) d(\cos(t/2)) = \\ &= -16\pi a^2 \left(\cos(t/2) - \frac{1}{3} \cos^3(t/2) \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{64\pi a^2}{3} \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($a > 0$).

Решение. В силу того, что кривая симметрична относительно обеих координатных осей, достаточно удвоить площадь поверхности, описанной дугой астроида, лежащей в 1-й четверти ($0 \leq t \leq \pi/2$).



По формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} |S_{\text{нов},X}| &= 2\pi \int_{T_0}^T |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} |a \sin^3 t| \sqrt{(-3a \cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt = \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sqrt{\sin^2 t \cdot \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot |\sin t \cdot \cos t| dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = \\ &= 12\pi a^2 \left(\frac{\sin^5 t}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5} \pi a^2 \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько важных следствий из доказанной выше теоремы.

Теорема 2 (случай явного задания кривой). Если кривая задана явно уравнением $y = y(x) \in C^1[a, b]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг оси Ox , вычисляется по формуле

$$|S_{\text{нов},X}| = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (3)$$

Эта теорема является прямым следствием теоремы 1.

Пример 3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от $x = 0$ до $x = \pi/2$.

Решение. Зависимость y от x задана явным образом. Вычислим $y'(x) = 2 \cos 2x$, тогда по формуле (3) имеем

$$|S_{нов, X}| = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| \sqrt{1 + (2 \cos 2x)^2} dx.$$

Учтём, что на промежутке интегрирования $|\sin 2x| = \sin 2x$, и произведём замену переменной $t = 2 \cos 2x$, откуда $-4 \sin 2x dx = dt$, т.е. $\sin 2x dx = -\frac{1}{4} dt$. Найдём пределы интегрирования по t : если $x = 0$, то $t = 2$, если $x = \pi/2$, то $t = -2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |S_{нов, X}| &= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right) \Big|_{-2}^2 = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \right) = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)) \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

Пример 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox цепной линии $y = ach \frac{x}{a}$ ($a > 0; |x| \leq b$).

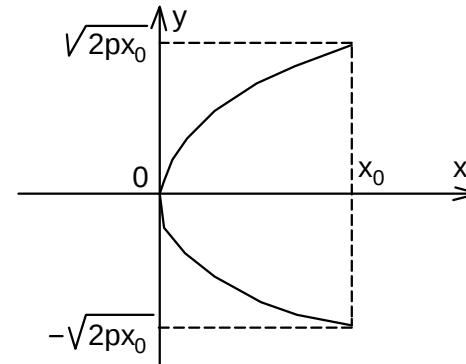
Решение. а) Учитывая, что $y = ach \frac{x}{a} > 0$, $y'(x) = sh \frac{x}{a}$ и $1 + sh^2 \frac{x}{a} = ch^2 \frac{x}{a}$, по формуле (3) получаем:

$$\begin{aligned} |S_{нов, X}| &= 2\pi a \int_{-b}^b ch \frac{x}{a} \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} dx = 4\pi a \int_0^b ch^2 \frac{x}{a} dx = \\ &= 2\pi a \int_0^b \left(1 + ch \frac{2x}{a} \right) dx = 2\pi a \left(b + \frac{a}{2} sh \frac{2b}{a} \right) = \\ &= \pi a \left(2b + ash \frac{2b}{a} \right) \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

Рассмотрим примеры, когда вращаемая вокруг оси Ox кривая задана неявно, или же уравнение разрешено относительно другой переменной, чем это требуется в формуле.

В примере, изложенном ниже, удаётся найти явную зависимость нужной переменной от другой (при этом для нахождения производной используется приём дифференцирования функции, заданной неявно).

Пример 5. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$).



Решение. Пусть, ради определённости, $p > 0$.

Чтобы найти производную $y'(x)$, продифференцируем равенство $y^2 = 2px$ по x : $2yy' = 2p$, откуда $y' = \frac{p}{y}$.

Поскольку $y = \sqrt{2px}$, то согласно формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} |S_{нов, X}| &= 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \\ &= 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{p+2x} dx. \end{aligned}$$

Положим $z = \sqrt{p+2x}$, тогда $dx = z dz$ и придём к интегралу

$$\begin{aligned} |S_{нов, X}| &= 2\pi \sqrt{p} \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}} z^2 dz = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} z^3 \Big|_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}} = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left((p+2x_0) \sqrt{p^2+2px_0} - p^2 \right) \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

В следующем примере уравнение, задающее кривую вращения, не разрешено относительно y , но разрешено относительно x , поэтому в формуле (3) удобно перейти к переменной интегрирования y (при этом производная

$y'(x)$ выражается через производную $x'(y)$ в соответствии с правилом дифференцирования обратной функции).

Пример 6. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox трактрисы $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ ($a > 0$).

Решение. Кривая симметрична относительно оси Oy , поэтому достаточно вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг Ox одной ветви этой кривой (например, лежащей в полуплоскости $x \geq 0$), и удвоить полученный результат. Для определения пределов интегрирования заметим, что при $y \rightarrow 0$ $x \rightarrow +\infty$, а при $y \rightarrow a$ $x \rightarrow 0$. В качестве переменной интегрирования возьмём y . Учтём, что при $x \geq 0$ положительному приращению переменной y соответствует отрицательное приращение переменной x ($x'(y) < 0$), поэтому

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x'(y)}\right)^2} \cdot x'(y) dy = \sqrt{1 + (x'(y))^2} \cdot \frac{x'(y)}{|x'(y)|} dy = -\sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

Несложно убедиться в том, что $-\sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = -\frac{ady}{y}$. Тогда по формуле (3) имеем:

$$\begin{aligned} |S_{нов,X}| &= 4\pi \int_0^{+\infty} |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = -4\pi \int_a^0 |y| \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = \\ &= 4\pi \int_0^a y \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = 4\pi a \int_0^a dy = 4\pi a^2 \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

В очередном примере, несмотря на то, что вращаемая кривая задана неявным уравнением, его легко можно разрешить относительно переменной y (правда, при этом кривую приходится разбивать на две кривые, и площади поверхностей суммировать).

Пример 7. Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) вокруг оси Ox .

Решение. Точки окружности симметричны относительно прямой $y = b$, проходящей через её центр. Эта прямая разбивает окружность на две части:

верхнюю (относительно $y = b$; её уравнение $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$) и нижнюю (с уравнением $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$). Площадь поверхности вращения вычислим по формуле $|S_{нов,X}| = |S_{нов,1}| + |S_{нов,2}|$, где

$$|S_{нов,1}| = 2\pi \int_{-a}^a y_1 \sqrt{1 + (y_1'(x))^2} dx, \quad |S_{нов,2}| = 2\pi \int_{-a}^a y_2 \sqrt{1 + (y_2'(x))^2} dx.$$

Так как

$$dl = \sqrt{1 + (y_1'(x))^2} dx = \sqrt{1 + (y_2'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

то

$$\begin{aligned} |S_{нов,X}| &= 2\pi a \int_{-a}^a (y_1 + y_2) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= 8\pi ab \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8\pi ab \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4\pi^2 ab \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

Наконец, в ряде случаев, когда кривая задана неявным образом, можно параметризовать её, и затем вычислить площадь поверхности вращения по формуле (1).

Пример 8. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Указание: воспользоваться параметрическими уравнениями этой кривой (см. пример 2 выше).

8.5.2. Вращение вокруг оси Oy

Из теоремы 1 следуют теоремы.

Теорема 3 (случай параметрического задания кривой). Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [T_0, T],$$

где $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$. Тогда площадь поверхности $S_{нов,Y}$, полученной вращением AB вокруг оси Oy , вычисляется по формуле

$$|S_{нов,Y}| = 2\pi \int_{T_0}^T |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4)$$

Пример 9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0; 0 \leq t \leq 2\pi).$$

Решение. Согласно формуле (4) имеем:

$$|S_{нов,Y}| = 4\pi a \int_0^{2\pi} |a(t - \sin t)| \sqrt{\sin^2(t/2)} dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin(t/2) dt.$$

Положим $z = t/2$, тогда придём к интегралу

$$\begin{aligned} |S_{нов,Y}| &= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (2z - \sin 2z) \sin z dz = \\ &= 16\pi a^2 \left((z \cos z) \Big|_{\pi}^0 + \int_0^{\pi} \cos z dz - \int_0^{\pi} \sin^2 z d(\sin z) \right) = \\ &= 16\pi a^2 \left(\pi - \frac{\sin^3 z}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = 16\pi^2 a^2 \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

Теорема 4 (случай явного задания кривой). Если кривая задана явно уравнением $x = x(y) \in C^{(1)}[c, d]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг оси Oy , вычисляется по формуле

$$|S_{нов,Y}| = 2\pi \int_c^d |x(y)| \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (5)$$

Пример 10. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$) вокруг оси Oy .

Решение. Пусть, ради определённости, $p > 0$. Учитывая симметрию кривой относительно оси абсцисс, по формуле (5) получаем

$$\begin{aligned} |S_{нов,Y}| &= 2\pi \int_c^d |x(y)| \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = 2\pi \int_{-\sqrt{2px_0}}^{\sqrt{2px_0}} \frac{y^2}{2p} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2} dy = \\ &= \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy. \end{aligned}$$

Вычислим неопределённый интеграл $I = \int y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy$ интегриро-

ванием его по частям. Так как $y\sqrt{p^2 + y^2} dy = d\left(\frac{1}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$, то

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} y - \frac{1}{3} \int (p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \\ &= \frac{y}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int (p^2 + y^2) \sqrt{p^2 + y^2} dy = \\ &= \frac{y}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\int p^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy + \int y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy \right) = \\ &= \frac{y}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\int p^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy + I \right) = \\ &= \frac{y}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{6} \left(y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) \right) + C - \frac{I}{3}, \end{aligned}$$

где C – произвольная постоянная. Отсюда находим

$$I = \frac{y}{4}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{8} \left(y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) \right) + C.$$

Окончательно, $|S_{нов,Y}| =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{p^2} \left(\frac{y}{4}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{8} \left(y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) \right) \right) \Big|_0^{\sqrt{2px_0}} = \\ &= \frac{\pi}{2p^2} \left(\sqrt{2px_0} (p^2 + 2px_0)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{2} \left(\sqrt{2px_0} (p^2 + 2px_0) + p^2 \ln \left(\frac{\sqrt{2px_0} + \sqrt{p^2 + 2px_0}}{p} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} \left((p + 4x_0) \sqrt{2x_0} (p + 2x_0) - p^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p + 2x_0}}{\sqrt{p}} \right) \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

Пример 11. Найти площадь поверхности, образованной вращением цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0; |x| \leq b$) вокруг оси Oy .

Решение. Кривая симметрична относительно оси Oy , поэтому достаточно вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг Oy той части этой кривой, которая лежит в полуплоскости $x \geq 0$ ($0 \leq x \leq b$).

Решая уравнение $\frac{2y}{a} = e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$ относительно x и учитывая вышесказан-

ное замечание, находим $x = a \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}$, $a \leq y \leq ach \frac{b}{a}$. Отсюда

$$x'(y) = \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}}, \quad dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - a^2}},$$

поэтому по формуле (5) получаем

$$\begin{aligned} |S_{нов, Y}| &= 2\pi \int_a^{ach \frac{b}{a}} |x(y)| \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = \\ &= 2\pi a \int_a^{ach \frac{b}{a}} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \\ &= 2\pi a \int_a^{ach \frac{b}{a}} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} d(\sqrt{y^2 - a^2}) = \\ &= 2\pi a \left(\sqrt{y^2 - a^2} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} \Big|_a^{ach \frac{b}{a}} - \int_a^{ach \frac{b}{a}} dy \right) = \\ &= 2\pi a \left(ash \frac{b}{a} \cdot \ln \frac{ach \frac{b}{a} + ash \frac{b}{a}}{a} - ach \frac{b}{a} + a \right) = \\ &= 2\pi a \left(bsh \frac{b}{a} - ach \frac{b}{a} + a \right) \quad (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

8.5.3. Вращение вокруг произвольной оси

Если вращение кривой осуществляется вокруг произвольной прямой (лежащей в плоскости кривой), то рекомендуется сделать переход к новой системе координат так, чтобы в новых координатах вращение происходило вокруг одной из координатных осей.

Пример 12. Найти площадь поверхности, образованной вращением арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$; $0 \leq t \leq 2\pi$) вокруг прямой $y = 2a$.

Решение. Перейдём к новым координатам $x_1 = x$, $y_1 = y - 2a$ (вращение кривой $y(x)$ вокруг прямой $y = 2a$ равнозначно с точки зрения равенства площадей образуемых при этом поверхностей вращению кривой $y_1(x) = y(x) - 2a$ вокруг оси Ox_1). Учитывая симметрию кривой относительно прямой $x_1 = \pi a$, а также то, что $y_1 \leq 0$, в новой системе координат получим:

$$\begin{aligned} |S_{нов, X_1}| &= 2\pi \int_0^{2\pi} |y_1(t)| \sqrt{(x'_1(t))^2 + (y'_1(t))^2} dt = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi} |y - 2a| \sqrt{(x'(t))^2 + ((y - 2a)')^2} dt = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi} |a(1 - \cos t) - 2a| \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sin(t/2) dt = -32\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^2(t/2) d \cos(t/2) = \frac{32}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

Во многих ситуациях полезной оказывается следующая теорема (можно сформулировать её аналог для плоского случая).

Теорема 5 (пространственный случай). Пусть имеются гладкая кривая L , заданная в пространстве параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [T_0, T],$$

где $x(t), y(t), z(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, и прямая p , являющаяся осью вращения, причём кривая лежит в плоскости, проходящей через p . Тогда площадь поверхности вращения находится по формуле

$$|S_{нов, p}| = 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl, \quad (6)$$

где $\rho(t)$ есть расстояние от точки $M(x(t); y(t); z(t))$, лежащей на кри-

вой, до оси вращения p , а dl – дифференциал дуги.

Доказательство. Пусть $\bar{T} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[T_0, T]$ точками M_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Впишем в кривую L ломаную L_n , соответствующую этому разбиению. Обозначим через $S_{n,p}$ поверхность, полученную при вращении ломаной L_n вокруг прямой p .

Отрезок $\Delta_k = [M_{k-1}, M_k]$ ломаной L_n при вращении вокруг оси p образует поверхность S_k , площадь которой вычисляется по формуле

$$|S_k| = 2\pi |\Delta_k| \rho(\tilde{M}_k) = 2\pi \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} \rho(\tilde{M}_k),$$

где $\tilde{M}_k$ – некоторая точка, лежащая на Δ_k , а $\rho(\tilde{M}_k)$ – расстояние от неё до прямой p .

Действуя так же, как в теореме 1, можно показать, что

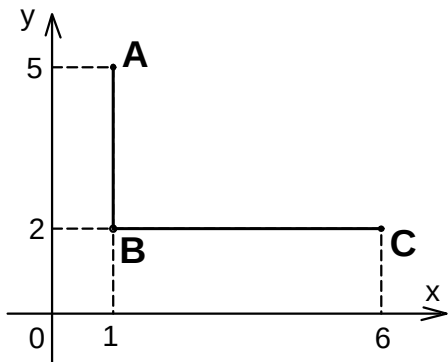
$$|S_k| = 2\pi \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2 + (z'(\xi_k))^2} \rho(M_k)(t_k - t_{k-1}) + o((t_k - t_{k-1})),$$

где $\xi_k \in (t_k - t_{k-1})$. Тогда для площади поверхности $S_{n,p}$ имеем: $|S_{n,p}| = \sum_{k=1}^n |S_k| = \sum_{k=1}^n 2\pi \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2 + (z'(\xi_k))^2} \rho(M_k)(t_k - t_{k-1}) + o(1)$

откуда по определению площади поверхности вращения получаем, что

$$|S_{нов,p}| = \sup_{\bar{T}} |S_{n,p}| = 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl,$$

где дифференциал дуги $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.



Пример 13. Найти площадь поверхности, полученной вращением ломаной ABC , где $A(1;5)$, $B(1;2)$, $C(6;2)$ вокруг оси Ox .

Решение. Запишем параметрические уравнения отрезков AB и BC :

$$AB: x = 1, y = t, 2 \leq t \leq 5;$$

$$BC: x = t, y = 2, 1 \leq t \leq 6.$$

Для отрезка AB имеем $\rho(t) = y(t) = t$,

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{0^2 + 1^2} dt = dt;$$

для отрезка BC имеем: $\rho(t) = y(t) = 2$,

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{1^2 + 0^2} dt = dt,$$

поэтому

$$|S_{нов,X}| = |S_{AB}| + |S_{BC}| = 2\pi \int_2^5 t dt + 2\pi \int_1^6 2 dt = 2\pi \left(\frac{25}{2} - 2 \right) + 20\pi = 41\pi \quad (\text{кв.ед}).$$

Пример 14. Найти площадь поверхности, образованной вращением части кривой $y = 3x - x^3$, лежащей в правой полуплоскости ($x \geq 0$) выше прямой $y = x$, вокруг этой прямой.

Решение. Из условия задачи следует, что $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, $y' = 3 - 3x^2$.

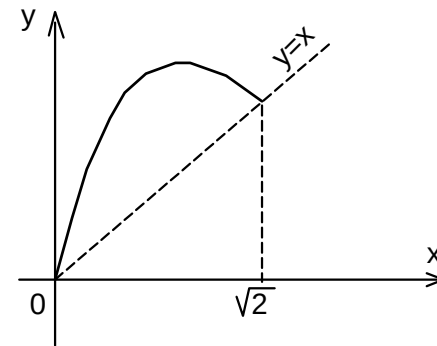
Найдём дифференциал дуги: $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \sqrt{1 + 9(1 - x^2)^2} dx$. Из-

вестно, что расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $y = ax + b$ находится по формуле

$$\rho = \frac{|y_0 - ax_0 - b|}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

поэтому в рассматриваемом случае расстояние $\rho(x)$ от точки $(x; y)$ до оси вращения (прямой $y = x$) равно

$$\frac{|3x - x^3 - x|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}}.$$



Следовательно, по формуле (6)

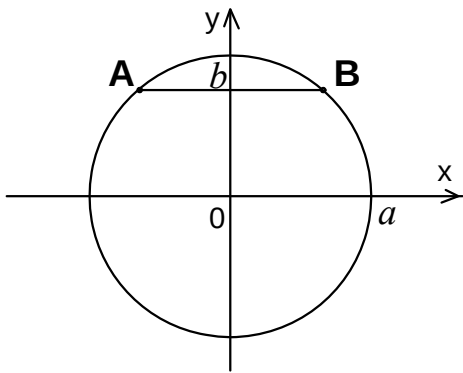
$$|S_{нов.}| = 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl = \sqrt{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2) \sqrt{1 + 9(1 - x^2)^2} x dx.$$

Сделаем замену $t = 1 - x^2$, тогда

$$\begin{aligned}
 |S_{нов.}| &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \int_{-1}^1 (1-t) \sqrt{1+9t^2} dt = \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{1+9t^2} + \frac{1}{6} \ln |3t + \sqrt{1+9t^2}| \right) \Big|_{-1}^1 = \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{6} (2\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})) \quad (\text{кв.ед}).
 \end{aligned}$$

Пример 15. Хорда AB окружности L радиуса a находится на расстоянии b ($b < a$) от центра окружности. Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг этой хорды каждой из частей L_1 и L_2 , на которые хорда делит окружность.

Решение. Введём декартову систему координат так, что её начало совпадает с центром окружности, ось Ox параллельна хорде AB .



Пусть хорда лежит в верхней полуплоскости. Запишем параметрические уравнения окружности: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тогда точка B соответствует значению $t_0 = \arcsin \frac{b}{a}$, точка A — значению $T = \pi - t_0$. Имеем:

$$L_1: x = a \cos t, y = a \sin t, t_0 \leq t \leq T; \quad L_2: x = a \cos t, y = a \sin t, T \leq t \leq 2\pi + t_0.$$

Для L_1 имеем: $\rho(t) = y(t) - b = a \sin t - b$,

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{(a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = a dt,$$

следовательно, по формуле (6)

$$\begin{aligned}
 |S_{нов,1}| &= 2\pi \int_{t_0}^{\pi-t_0} (a \sin t - b) a dt = -2\pi a^2 \cos t \Big|_{t_0}^{\pi-t_0} - 2ab\pi(\pi - 2t_0) = \\
 &= 4\pi a^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - 2ab\pi^2 + 4\pi ab \arcsin \frac{b}{a}.
 \end{aligned}$$

Для L_2 имеем: $\rho(t) = b - y(t) = b - a \sin t$, $dl = a dt$, следовательно,

$$\begin{aligned}
 |S_{нов,2}| &= 2\pi \int_{\pi-t_0}^{2\pi+t_0} (b - a \sin t) a dt = 2\pi ab(\pi + 2t_0) + 2\pi a^2 \cos t \Big|_{\pi-t_0}^{2\pi+t_0} = \\
 &= 2\pi^2 ab + 4\pi ab \arcsin \frac{b}{a} + 4\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{кв.ед}).
 \end{aligned}$$

8.6. Площадь поверхности вращения в полярных координатах

8.6.1. Вращение вокруг полярной оси

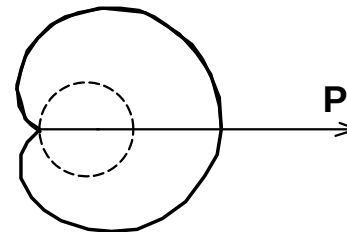
Теорема 6. Если кривая задана явно в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $r(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_0, \varphi_1]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг полярной оси OP (оси Ox при соответствующем совмещении с декартовой системой координат), вычисляется по формуле

$$|S_{нов,P}| = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (7)$$

Доказательство. Формула (7) получается из формулы (1') выбором параметризации $x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$. Действительно, в этом случае дифференциал дуги

$$\begin{aligned}
 dl &= \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi = \\
 &= \sqrt{(r'(\varphi))^2 \cos^2 \varphi + (r(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + (r'(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + (r(\varphi))^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\
 &= \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Пример 16. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$ вокруг полярной оси OP .

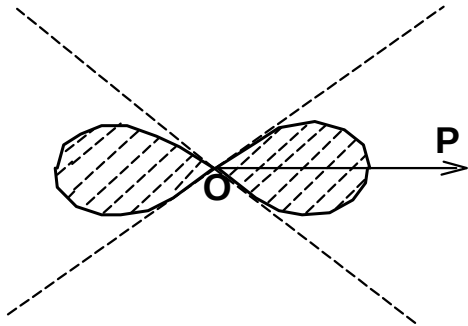


Решение.

Воспользуемся формулой (7), учитывая при этом симметрию данной кривой относительно полярной оси:

$$\begin{aligned}
|S_{\text{нов},P}| &= 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} |r \sin \varphi| \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} |a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi| \sqrt{(a(1 + \cos \varphi))^2 + (-a \sin \varphi)^2} d\varphi = \\
&= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) \sin \varphi |\cos(\varphi/2)| d\varphi = \\
&= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \cos(\varphi/2) d\varphi = \\
&= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4(\varphi/2) \sin(\varphi/2) d\varphi = \\
&= -32\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4(\varphi/2) d \cos(\varphi/2) = \frac{32}{5} \pi a^2 \text{ (кв.ед)}.
\end{aligned}$$

Пример 17. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением лемнискаты Бернулли, заданной в полярной системе координат уравнением $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ($a > 0$), вокруг полярной оси.



Решение. Данная кривая $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ симметрична относительно обеих координатных осей, поэтому для нахождения искомой площади поверхности достаточно удвоить площадь, полученную от вращения той части кривой, что расположена в первой четверти ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$). Найдём пределы интегрирования: $\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi/4$.

Поскольку

$$|r \sin \varphi| = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi,$$

$$r'(\varphi) = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi},$$

то по формуле (7) получаем:

$$\begin{aligned}
|S_{\text{нов},P}| &= 4\pi \int_0^{\pi/4} |r \sin \varphi| \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = \\
&= 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}) \text{ (кв.ед)}.
\end{aligned}$$

8.6.2. Вращение вокруг прямой, перпендикулярной полярной оси

Теорема 7. Если кривая задана явно в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $r(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_0, \varphi_1]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг прямой, перпендикулярной полярной оси (оси Оу при соответствующем совмещении с декартовой системой координат), вычисляется по формуле

$$|S_{\text{нов},Y}| = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} |r \cos \varphi| \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (8)$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 6 (на базе формулы (4)).

Пример 18. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ($a > 0$) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Учитывая область определения кривой и её симметрию относительно обеих координатных осей, по формуле (8) получаем

$$\begin{aligned}
|S_{\text{нов},Y}| &= 4\pi \int_0^{\pi/4} |r \cos \varphi| \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2 \\
&\text{(кв.ед)}.
\end{aligned}$$

8.6.3. Вращение вокруг произвольной оси

1. Иногда при нахождении площади поверхности вращения в случае, когда кривая задана в полярных координатах, бывает удобно перейти от полярных координат к прямоугольным, и уже затем выполнять преобразование координат так, чтобы в новой системе координат вращение происходило вокруг одной из координатных осей.

Пример 19. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$, вокруг левой вертикальной касательной к этой кривой.

Решение. Перейдём в прямоугольные координаты. В декартовой системе координат, совмещённой с полярной, x и y запишутся как функции пара-

метра $\varphi: x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi$. Подставляя вместо $r(\varphi)$ выражение $a(1 + \cos\varphi)$, получим параметрические уравнения кардиоиды в прямоугольных координатах:

$$x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Найдём уравнение касательной в этой прямоугольной системе координат. Левая вертикальная касательная к кривой проходит через точку $(x(\varphi_0), y(\varphi_0))$, где $x(\varphi_0)$ – наименьшее значение функции $x(\varphi)$ на сегменте $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Наименьшее значение непрерывной на сегменте функции может достигаться или в точках локальных экстремумов, или в его граничных точках. Производная имеет вид $x'(\varphi) = -a(\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi)$, поэтому наименьшее значение $x(\varphi)$ достигается в одной из следующих точек:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_3 = \pi, \varphi_4 = \frac{4\pi}{3}, \varphi_5 = 2\pi. \text{ Легко показать, что наи-}$$

меньшее значение $x(\varphi)$ достигается в точках φ_2 и φ_4 и равно $-\frac{a}{4}$. Итак,

уравнение левой вертикальной касательной: $x = -\frac{a}{4}$. Расстояние $\rho(\varphi)$ от

точки $(x(\varphi), y(\varphi))$ до оси вращения равно $x(\varphi) + \frac{a}{4}$, дифференциал дуги

dl , как было показано в предыдущем пункте, равен $2a|\cos(\varphi/2)|d\varphi$. Учитывая симметрию кривой относительно полярной оси, по формуле (6) получаем

$$\begin{aligned} |S_{нов.}| &= 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(x(\varphi) + \frac{a}{4} \right) 2a |\cos(\varphi/2)| d\varphi = \\ &= 8\pi a \int_0^\pi \left(x(\varphi) + \frac{a}{4} \right) \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^\pi \left((1 + \cos\varphi) \cos\varphi + \frac{1}{4} \right) \cos(\varphi/2) d\varphi = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^\pi \left(\cos\varphi \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 8\pi a^2 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + \frac{3}{4} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \left(\cos \frac{3\varphi}{2} + \cos \frac{5\varphi}{2} \right) \right) d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^\pi \left(\left(\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + \frac{3}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\varphi}{2} + \cos \frac{5\varphi}{2} \right) \right) d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^\pi \left(\frac{5}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \left(5 \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\varphi}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{84}{5} \pi a^2 \text{ (кв.ед)}. \end{aligned}$$

Пример 20. Часть спирали $r = e^\varphi$, $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$, вращается вокруг прямой, проходящей через концевые точки спирали. Найти площадь поверхности полученного тела.

Решение. Выберем декартову систему координат так, чтобы начало координат совпало с полюсом, положительная полуось Ox с лучом $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Тогда

$$\begin{aligned} x &= r \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) = e^{\varphi - \frac{\pi}{6}} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right), \\ y &= r \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) = e^{\varphi - \frac{\pi}{6}} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Найдём дифференциал дуги:

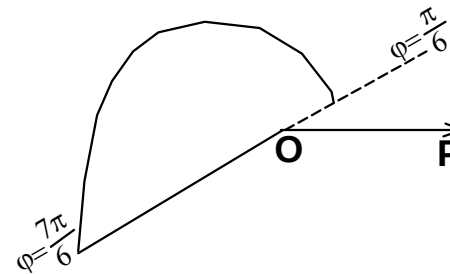
$$dl = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi = e^\varphi \sqrt{2} d\varphi.$$

Так как осью вращения является ось Ox , то

$$\rho(\varphi) = |y(\varphi)| = e^{\varphi - \frac{\pi}{6}} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right).$$

Следовательно, по формуле (6):

$$|S_{нов.}| = 2\pi \int_{T_0}^T \rho(t) dl =$$



$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \sqrt{2} e^{2\varphi - \frac{\pi}{6}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) d\varphi = 2\pi \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^{2t + \frac{\pi}{6}} \sin t dt = \\
&= 2\sqrt{2} \pi e^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\pi} e^{2t} \sin t dt = 2\sqrt{2} \pi e^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{5} (2 \sin t - \cos t) e^{2t} \right) \Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{5} \pi e^{\frac{\pi}{6}} (e^{2\pi} + 1) \text{ (кв.ед)}.
\end{aligned}$$

2. В других случаях переходят к *новым* полярным координатам так, чтобы в результате вращение происходило вокруг новой полярной оси.

Пример 21. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ($a > 0$) вокруг оси $\varphi = \pi/4$.

Решение. Перейдём к новым полярным координатам. Примем луч $\varphi = \pi/4$ за новую полярную ось, положив $\varphi_1 = \varphi - \frac{\pi}{4}$, $r_1(\varphi_1) = r(\varphi)$.

Тогда $|S_{нов.}| = |S_{нов,1}| + |S_{нов,2}|$, где

$$\begin{aligned}
|S_{нов,1}| &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} r_1(\varphi_1) |\sin \varphi_1| \sqrt{(r_1(\varphi_1))^2 + (r_1'(\varphi_1))^2} d\varphi_1, \\
|S_{нов,2}| &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 r_1(\varphi_1) |\sin \varphi_1| \sqrt{(r_1(\varphi_1))^2 + (r_1'(\varphi_1))^2} d\varphi_1
\end{aligned}$$

(с учётом симметрии точек кривой относительно оси вращения и того, что в новой системе координат $\sin \varphi_1$ принимает отрицательные значения при изменении φ_1 от $-\pi/2$ до 0).

Возвращаясь к прежним координатам r и φ , получим:

$$|S_{нов,1}| = 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{\cos 2\varphi} \left| \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right| \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left| \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\varphi = \\
&= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = 4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = 2\pi a^2 \sqrt{2}. \\
|S_{нов,2}| &= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\varphi = 4\pi a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = \\
&= 4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}). \\
\text{Окончательно, } |S_{нов.}| &= 2\pi a^2 \sqrt{2} + 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}) = 4\pi a^2 \text{ (кв.ед)}.
\end{aligned}$$

Контрольные задания

и задачи для самостоятельного решения к §8

Найдите площади поверхностей тел, образованных вращением вокруг оси Ox дуг кривых, заданных явным образом в декартовой системе координат:

1. $y = 2ch \frac{x}{2}$ от $x = 0$ до $x = 2$.
2. $y = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1/2$.
3. $y = \frac{1}{x}$, $0 < a \leq x \leq b$.
4. $y^2 + 4x = 2 \ln y$, $1 \leq y \leq 2$.
5. $y = tg x$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

Найдите площади поверхностей тел, образованных вращением дуг кривых, заданных параметрически в декартовой системе координат:

6. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (площадь, образованную вращением вокруг оси Ox одной арки).
7. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, вокруг оси Ox .
8. $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, вокруг оси симметрии.
9. $x = a \left(\cos t + \ln \left(tg \frac{t}{2} \right) \right)$, $y = a \sin t$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$, вокруг оси Ox .

10. $x = 2a \sin^2 t$, $y = 2a \cos t$ вокруг оси Ox .
 11. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ вокруг оси Ox .
 12. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, вокруг прямой $y = x$.

Найдите площади поверхностей тел, образованных вращением дуги AB кривой:

13. $x = at^2$, $y = \frac{1}{3}at(3 - t^2)$, $A(0;0)$, $B(3a;0)$: а) вокруг оси Ox ; б)

вокруг оси Oy .

14. $x = \frac{9}{5}at^4$, $y = \frac{6}{25}a(5t^3 - 3t^5)$, $A(0;0)$, $B(5a;0)$: а) вокруг оси

Ox ; б) вокруг оси Oy .

15. $x = 2at^3$, $y = \frac{3}{4}a(2t^2 - t^4)$, $A(0;0)$, $B(4a\sqrt{2};0)$: а) вокруг оси

Ox ; б) вокруг оси Oy .

Найдите площади поверхностей тел, образованных вращением дуг кривых, заданных неявным образом в декартовой системе координат:

16. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \geq b$, вокруг оси Ox).

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \geq b$, вокруг оси Oy).

18. $3ay^2 = x(a - x)^2$ (петли кривой вокруг оси Ox).

19. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением окружности радиуса a относительно прямой, лежащей в её плоскости и отстоящей от центра на расстояние b ($b > a$).

20. Найдите полную площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y^2 = 2x$ и $2x = 3$.

21. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении области, лежащей внутри окружности $r = 2a \sin \varphi$ и вне окружности $r = a$, относительно осей координат.

22. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением области, ограниченной кривой $r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$ ($a > b$), а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

§ 9.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

В предыдущем параграфе были рассмотрены основные геометрические приложения определённого интеграла. Данный параграф посвящён приложениям из области физики, в частности, механики.

9.1. Масса плоской кривой

Теорема 1. Пусть AB – плоская гладкая кривая, $\rho(l)$ – линейная плотность массы⁶ в текущей точке кривой ($0 \leq l \leq L$). Тогда масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_0^L \rho(l) dl, \quad (1)$$

где dl – дифференциал дуги.

Доказательство. Поскольку по определению линейной плотности $\Delta M = \rho(l)\Delta l + o(\Delta l)$, где ΔM – масса части кривой, соответствующая промежутку $[l, l + \Delta l]$ изменения параметра l , то это означает, что функция $M(l)$ является одной из первообразных для функции $\rho(l)$ на сегменте $[0, L]$. Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница получаем выражение для

массы всей кривой (при изменении l от 0 до L): $M = \int_0^L \rho(l) dl$, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае постоянной линейной плотности $\rho \equiv 1$ (масса распределена равномерно вдоль кривой) масса кривой численно равна её длине.

Эта теорема имеет ряд важных следствий.

Следствие 1. Пусть простая плоская кривая задана в декартовой системе координат параметрическими уравнениями

⁶ То есть масса, приходящаяся на единицу длины.

$$x = x(t), y = y(t), t \in [T_0, T],$$

где $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, и пусть $\rho(x(t), y(t))$ – линейная плотность распределения массы в точке (x, y) этой кривой. Тогда масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{T_0}^T \rho(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (2)$$

Следствие 2. Если кривая задана явным образом в декартовой системе координат уравнением $y = y(x)$, где $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$, то её масса вычисляется по формуле

$$M = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (3)$$

Если же кривая задана явным уравнением $x = x(y)$, где $x(y) \in C^{(1)}[c, d]$, то масса кривой вычисляется по аналогичной формуле

$$M = \int_c^d \rho(y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (3')$$

Следствие 3. В случае, когда кривая задана явным образом в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_0, \varphi_1]$, то масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho(\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4)$$

9.2. Статические моменты, моменты инерции и центры тяжести плоских кривых и фигур

9.2.1. Случай плоской кривой

Пусть на плоскости в декартовых координатах Oxy задана система n материальных точек $A_k(x_k, y_k)$ с массами m_k , и некоторая прямая p (ось), причём расстояние от точки A_k до оси равно d_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Статическим моментом этой системы относительно данной оси p называется сумма

$$M_p = \sum_{k=1}^n m_k d_k,$$

где расстояния d_k точек, лежащих по одну сторону от оси, берутся со знаком плюс, а расстояния точек по другую сторону – со знаком минус.

В частности, статическими моментами M_x и M_y системы точек $\{A_k\}$ относительно осей Ox и Oy соответственно называются суммы произведений масс этих точек на их ординаты (абсциссы):

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k.$$

Моментами инерции I_x и I_y системы материальных точек $\{A_k\}$ относительно осей Ox и Oy называются суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний до соответствующей оси:

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2.$$

Если же массы не сосредоточены в отдельных точках, а сплошь заполняют линию или плоскую фигуру, то для выражения статических моментов и моментов инерции потребуются уже не суммы, а интегралы в смысле Римана. Предположим всюду в дальнейшем рассуждениях кривую (плоскую фигуру) однородной, т.е. с постоянной линейной (плоскостной) плотностью ρ . Для простоты будем считать, что $\rho \equiv 1$ (в противном случае полученный результат следует умножить на ρ).

Теорема 1 (статические моменты и моменты инерции плоской кривой). Пусть дана дуга AB плоской гладкой кривой длины L . Возьмём за независимую переменную длину дуги l , отсчитываемую от точки A ($0 \leq l \leq L$). Тогда статические моменты и моменты инерции⁷ этой дуги относительно осей Ox и Oy вычисляются соответственно по формулам

$$M_x = \int_0^L y(l) dl, \quad M_y = \int_0^L x(l) dl, \quad (1)$$

$$I_x = \int_0^L y^2(l) dl, \quad I_y = \int_0^L x^2(l) dl, \quad (2)$$

где dl – дифференциал дуги.

⁷ Момент инерции тела является в физике мерой инертности тела во вращательном движении вокруг неподвижной оси, подобно тому как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении

Доказательство. Выделим элемент dl кривой AB . Поскольку плотность кривой мы считаем равной единице, то масса этого элемента кривой также выражается числом dl . Приняв этот элемент приближенно за материальную точку, лежащую на расстоянии y от оси Ox , получим выражение для его статического момента: $dM_x = ydl$. Если теперь взять за независимую переменную длину дуги l , отсчитываемую от точки A , то, суммируя эти элементарные моменты, получим: $M_x = \int_0^L y(l)dl$. Аналогично выражается и момент относительно оси Oy : $M_y = \int_0^L x(l)dl$.

Чтобы получить формулу для вычисления моментов инерции дуги кривой AB , заметим, что для моментов инерции элемента dl этой кривой относительно осей Ox и Oy справедливы формулы: $dI_x = y^2 dl$, $dI_y = x^2 dl$. Снова взяв за независимую переменную длину дуги l , получаем, что $I_x = \int_0^L y^2(l)dl$, $I_y = \int_0^L x^2(l)dl$. Теорема доказана.

Статические моменты M_x и M_y кривой легко позволяют установить положение её центра тяжести $C(x_c; y_c)$. Точка C обладает тем свойством, что если в ней сосредоточить всю «массу» L кривой (численно равную длине), то момент этой точки относительно *любой* оси совпадает с моментом кривой относительно этой оси.

Теорема 2 (координаты центра тяжести плоской кривой). Координаты центра тяжести дуги плоской кривой находятся по формулам

$$x_c = \frac{1}{L} \int_0^L x(l)dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_0^L y(l)dl. \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим моменты M_x и M_y данной кривой относительно координатных осей. По определению центра тяжести получаем, что

$$Lx_c = M_y = \int_0^L x(l)dl, \quad Ly_c = M_x = \int_0^L y(l)dl.$$

Отсюда немедленно следуют формулы (3) для нахождения координат центра тяжести дуги кривой. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько следствий из этих теорем.

Следствие 1. Если плоская кривая задана в декартовой системе координат явным уравнением $y = y(x)$, $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$, то статические моменты, моменты инерции⁸ относительно координатных осей и координаты центра тяжести её дуги вычисляются по формулам

$$M_x = \int_a^b y(x)dl, \quad M_y = \int_a^b xdl, \quad I_x = \int_a^b y^2(x)dl, \quad I_y = \int_a^b x^2dl, \quad (4)$$

$$x_c = \frac{1}{L} \int_a^b xdl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_a^b y(x)dl. \quad (5)$$

где дифференциал дуги $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$, $L = \int_a^b dl$.

Следствие 2. Если плоская кривая задана в декартовой системе координат параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$, $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, $x(T_0) = a$, $x(T) = b$, то статические моменты и моменты инерции дуги относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$M_x = \int_{T_0}^T y(t)dl, \quad M_y = \int_{T_0}^T x(t)dl, \quad I_x = \int_{T_0}^T y^2(t)dl, \quad I_y = \int_{T_0}^T x^2(t)dl, \quad (6)$$

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{T_0}^T x(t)dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{T_0}^T y(t)dl. \quad (7)$$

где дифференциал дуги $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, $L = \int_{T_0}^T dl$.

Следствие 3. Если кривая задана явно в полярной системе координат (совмещённой с прямоугольной) уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, $r(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_0, \varphi_1]$, то статические моменты и моменты инерции её дуги

⁸ Моменты инерции относят к моментам 2-го порядка (моментом k -го порядка функции

$f(x)$ называется число $\mu_k = \int_a^b x^k f(x)dx$ ($k \in \mathbb{N}$). Одна из задач математического

анализа (проблема моментов) состоит в том, чтобы охарактеризовать свойства функции $f(x)$ по свойствам последовательности её моментов.

относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sin \varphi dl, \quad M_y = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \cos \varphi dl,$$

$$I_x = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r \sin \varphi)^2 dl, \quad I_y = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r \cos \varphi)^2 dl \quad (8)$$

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \cos \varphi dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sin \varphi dl. \quad (9)$$

где дифференциал дуги $dl = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$, $L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} dl$.

Замечание. Если рассматриваемая дуга симметрична относительно некоторой прямой, то центр тяжести дуги лежит на этой прямой.

Из формулы для ординаты y_c центра тяжести можно получить замечательное геометрическое следствие.

Теорема 3 (первая теорема Гульдина⁹). Величина площади поверхности, полученной от вращения кривой вокруг некоторой не пересекающей её оси, лежащей в плоскости кривой, равна длине L дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести C кривой:

$$S_{\text{пов.}} = 2\pi y_c L.$$

Доказательство. В самом деле, имеем

$$y_c L = \int_0^L y(l) dl, \quad \text{откуда} \quad 2\pi y_c L = 2\pi \int_0^L y(l) dl,$$

но правая часть этого равенства есть площадь $S_{\text{пов.}}$ поверхности, полученной от вращения кривой AB вокруг оси Ox , в левой же части равенства выражение $2\pi y_c$ означает длину окружности, описанной центром тяжести кривой при вращении её около оси Ox . Таким образом, теорема доказана.

Пример 1. Найдите статический момент и момент инерции полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($-r \leq x \leq r$) относительно оси Ox .

Решение. Статический момент будем вычислять по формуле

$$M_x = \int_a^b y(x) dl, \quad \text{где} \quad dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Тогда получим

$$M_x = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r dx = 2r^2.$$

Найдём момент инерции относительно оси Ox :

$$I_x = \int_a^b y^2 dl = \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx =$$

$$= 2r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Выполним подстановку $x = r \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, тогда $dx = r \cos t dt$. Следовательно,

$$I_x = 2r \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = r^3 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= r^3 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

Пример 2. Найдите статические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, лежащей в I-й четверти.

Решение. В силу симметрии астроиды относительно обеих координатных осей имеем: $M_x = M_y$, $I_x = I_y$. Поэтому достаточно вычислить моменты относительно оси Ox . Для первой четверти параметр t изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$. Так как $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 3a \sin t \cos t dt$, то

$$M_x = \int_{T_0}^T y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt =$$

$$= \frac{3a^2}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2}{5},$$

⁹ Guldin Paul (1577–1643) – швейцарский математик.

$$I_x = \int_{T_0}^T y^2(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t \cdot 3a \sin t \cos t dt =$$

$$= \frac{3a^3}{8} \sin^8 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^3}{8}.$$

Пример 3. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии

$$y = ach \frac{x}{a}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Решение. Так как кривая симметрична относительно оси Oy , то её центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $x_c = 0$. Остаётся найти y_c . Имеем

$$y'(x) = sh \frac{x}{a}, \text{ тогда}$$

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + sh^2(x/a)} dx = ch(x/a) dx,$$

и длина дуги

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_{-a}^a ch(x/a) dx = 2 \int_0^a ch(x/a) dx =$$

$$= 2ash \left(x/a \right) \Big|_0^a = 2ash1.$$

Следовательно,

$$y_c = \frac{1}{L} \int_{-a}^a y \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \frac{1}{2ash1} \int_{-a}^a ach^2(x/a) dx =$$

$$= \frac{1}{sh1} \int_0^a ch^2(x/a) dx = \frac{1}{2sh1} \int_0^a (1 + ch(2x/a)) dx =$$

$$= \frac{1}{2sh1} \left(x + \frac{a}{2} sh \frac{2x}{a} \right) \Big|_0^a = \frac{a(2 + sh2)}{4sh1}.$$

9.2.2. Случай плоской фигуры

Рассмотрим на плоскости в прямоугольных координатах Oxy криволинейную трапецию F , ограниченную сверху гладкой кривой AB , снизу осью абсцисс, слева и справа – вертикальными прямыми, проходящими через точки A и B (с абсциссами a и b соответственно). Предположим, что по этой фигуре равномерно распределена масса с постоянной поверхностной плотно-

стью ρ . Без существенного ограничения общности будем считать, что $\rho \equiv 1$ (в этом случае масса трапеции численно равна её площади).

Теорема 4 (статические моменты и моменты инерции плоской фигуры). Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции F относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^S y ds, \quad M_y = \int_0^S x ds, \quad (7)$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^S y^2 ds, \quad I_y = \int_0^S x^2 ds, \quad (8)$$

где ds – дифференциал площади криволинейной трапеции (в прямоугольных координатах $ds = y dx$), S – площадь криволинейной трапеции F .

Доказательство. Как и в случае нахождения статических моментов плоской кривой, выделим элемент криволинейной трапеции в виде бесконечно узкой вертикальной полоски. Приняв эту полоску приближенно за прямоугольник, получим, что её масса (выражаемая тем же числом, что и площадь) будет равна $y dx$. Для определения соответствующих элементарных моментов dM_x , dM_y предположим, что вся масса полоски сосредоточена в её центре тяжести (т.е. в центре прямоугольника), что, как известно, не изменит величин статических моментов. Полученная материальная точка отстоит на

расстоянии $\frac{1}{2}y$ от оси Ox и на расстоянии $x + \frac{1}{2}dx$ от оси Oy . Так как величина $\frac{1}{2}dx$, умноженная на массу $y dx$, даёт бесконечно малую более

высокого порядка, то имеем: $dM_x = \frac{1}{2}y^2 dx + o(dx)$, $dM_y = xy dx$. Просуммировав эти элементарные моменты, приходим к формулам

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx.$$

Если теперь ввести в рассмотрение дифференциал площади ds (т.е. сделать в интеграле замену переменной $s = \int_a^x y dx$), то получаем формулы (7)

для вычисления статических моментов криволинейной трапеции.

Для вычисления моментов инерции заметим, что каждую полоску ширины dx можно разбить на элементарные прямоугольники со сторонами dx и dy . Тогда моменты инерции этих элементарных прямоугольников относительно осей Ox и Oy равны соответственно

$$\left(y + \frac{1}{2}dy\right)^2 dx dy \text{ и } \left(x + \frac{1}{2}dx\right)^2 dx dy.$$

Отсюда получаем, что моменты инерции всей полоски относительно этих осей вычисляются по формулам: $dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx$, $dI_y = x^2 y dx$. Просуммировав эти моменты по всем полоскам, на которые мы разбили трапецию, имеем:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 y dx.$$

Или, после замены переменной $s = \int_a^x y dx$,

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^S y^2 ds, \quad I_y = \int_0^S x^2 ds.$$

Теорема полностью доказана.

Как и в случае с плоской кривой, по статическим моментам плоской фигуры относительно осей координат определяются координаты $(x_c; y_c)$ центра тяжести фигуры.

Теорема 5 (координаты центра тяжести плоской фигуры). Пусть S – площадь фигуры, тогда центр тяжести имеет координаты

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S}. \quad (9)$$

Доказательство. Воспользовавшись основным свойством центра тяжести

$$x_c S = M_y = \int_0^S x ds, \quad y_c S = M_x = \frac{1}{2} \int_0^S y ds,$$

немедленно получим формулы (9) для вычисления координат центра тяжести.

Рассмотрим следствия из этих теорем.

Следствие 1. Если кривая AB , ограничивающая сверху криволинейную трапецию F , задана явным уравнением $y = y(x)$, $y(x) \in C^1[a, b]$, т.е.

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)\},$$

то статические моменты, моменты инерции относительно координатных осей и координаты центра тяжести фигуры F вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2(x) dx, \quad M_y = \int_a^b xy(x) dx, \quad (10)$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3(x) dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 y(x) dx, \quad (11)$$

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b xy(x) dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2(x) dx, \text{ где } S = \int_a^b y(x) dx. \quad (12)$$

Следствие 2. Если кривая AB , ограничивающая сверху криволинейную трапецию F , задана в декартовой системе координат параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$, $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, $x(T_0) = a$, $x(T) = b$, то статические моменты, моменты инерции относительно координатных осей и координаты центра тяжести фигуры F вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{T_0}^T y^2(t) dx(t), \quad M_y = \int_{T_0}^T x(t) y(t) dx(t), \quad (13)$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{T_0}^T y^3(t) dx(t), \quad I_y = \int_{T_0}^T x^2(t) y(t) dx(t), \quad (14)$$

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{T_0}^T x(t) y(t) dx(t), \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_{T_0}^T y^2(t) dx(t), \text{ где } S = \int_{T_0}^T y(t) dx(t). \quad (15)$$

Замечание 1. Если кривая AB , ограничивающая криволинейный сектор F , задана в полярной системе координат (совмещённой с прямоугольной) уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, $r(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_0, \varphi_1]$, т.е.

$$F = \{(r; \varphi) \mid 0 \leq r \leq r(\varphi), \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1\},$$

то статические моменты, моменты инерции относительно осей Ox и Oy , и координаты центра тяжести фигуры F вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad M_y = \frac{1}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad (16)$$

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^4(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi, \quad I_y = \frac{1}{4} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^4(\varphi) \cos^2 \varphi d\varphi, \quad (17)$$

$$x_c = \frac{1}{3S} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad y_c = \frac{1}{3S} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (18)$$

где $S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi$. Полярные координаты $(r_c; \varphi_c)$ центра тяжести находятся при помощи формул, связывающих полярные координаты с совмещёнными прямоугольными:

$$\begin{cases} x_c = r_c \cos \varphi_c \\ y_c = r_c \sin \varphi_c \end{cases}.$$

Замечание 2. Если фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести фигуры лежит на этой оси.

И в этом случае получаем важное геометрическое следствие из формулы для ординаты y_c центра тяжести.

Теорема 6 (вторая теорема Гульдина). Величина объёма тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг некоторой не пересекающей её оси, лежащей в плоскости фигуры, равен произведению площади S этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести C фигуры:

$$V = 2\pi y_c S.$$

Доказательство. В самом деле, имеем

$$y_c S = M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y ds, \quad \text{откуда} \quad 2\pi y_c S = \pi \int_a^b y ds.$$

Правая часть этого равенства выражает объём V тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox , а левая часть есть произведение площади этой фигуры на $2\pi y_c$ — длину окружности, описываемой центром тяжести фигуры. Теорема доказана.

Замечание 3. Формулы (10)–(12) (и их аналоги) справедливы и в случае криволинейной трапеции, ограниченной кривыми как снизу, так и сверху:

$$F = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y_1(x) \leq y \leq y_2(x), y \in C[a, b]\}.$$

Для этого случая

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx, \quad M_y = \int_a^b x(y_2(x) - y_1(x)) dx,$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b (y_2^3(x) - y_1^3(x)) dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 (y_2(x) - y_1(x)) dx,$$

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S}.$$

Вторая теорема Гульдина также справедлива в этом случае.

Замечание 4. Аналогично вводится понятие момента инерции I_p однородного тела V в пространстве (в предположении, что объёмная плотность тела равна 1) относительно произвольной оси p :

$$I_p = \int_{(V)} r^2 dV,$$

где r — расстояние от элемента dV до оси p (кратный интеграл берётся по области, занимаемой телом V). Согласно *теореме Штейнера* (теореме о переносе осей инерции) момент инерции тела относительно произвольной оси p равен сумме момента инерции I_c этого тела относительно оси, проходящей через центр инерции (тяжести) тела параллельно рассматриваемой оси p , и произведения массы тела M на квадрат расстояния d между осями:

$$I = I_c + Md^2.$$

Обратимся к примерам.

Пример 1. Найти статические моменты и координаты центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямыми $y = 0$ и $x = 1$.

Решение. $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^1 x dx = \frac{p}{2},$

$$M_y = \int_a^b xy(x) dx = \int_0^1 x \sqrt{2px} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}.$$

Вычислим площадь этой криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b y(x) dx = \int_0^1 \sqrt{2px} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}.$$

Теперь находим координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{3}{5}, \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{3}{8} \sqrt{2p}.$$

Пример 2. Найти момент инерции плоской фигуры, ограниченной эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, относительно оси Oy .

Решение. Момент инерции данной фигуры относительно оси Oy (с учётом симметрии эллипса относительно оси абсцисс), равен

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \int_{-a}^a x^2 y dx = 4 \int_0^a x^2 y dx = 4 \int_{\pi/2}^0 x^2(t) y(t) dx(t) = \\ &= -4a^3 b \int_{\pi/2}^0 \cos^2 t \sin^2 t dt = a^3 b \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{a^3 b}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^3 b}{2} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3 b}{4}. \end{aligned}$$

Пример 3. Применяя вторую теорему Гульдина, найти координаты центра тяжести плоской фигуры F , ограниченной одной аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ и осью } Ox.$$

Решение. Объём тела, полученного от вращения фигуры вокруг оси Ox , равен

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t) x'(t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3.$$

$$\text{Площадь фигуры } F \text{ равна } S = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

Пусть y_c – ордината центра тяжести. Согласно второй теореме Гульдина

$$S \cdot 2\pi y_c = V_x, \text{ откуда } y_c = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{5a}{6}.$$

Из симметрии фигуры F относительно прямой $x = \pi a$ следует, что абсцисса центра тяжести $x_c = \pi a$.

Пример 4. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, расположенной в 1-й четверти, и осями координат.

Решение. В 1-й четверти при возрастании x от 0 до a величина t убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Учитывая это, а также то, что площадь эллипса равна πab , находим

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{S} \int_0^a xy dx = \frac{1}{S} \int_{\pi/2}^0 a \cos t \cdot b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= \frac{a^2 b}{S} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t d(\sin t) = \frac{a^2 b}{3S}, \text{ где } S = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, $x_c = \frac{4a}{3\pi}$. Аналогично находим

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{2S} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2S} \int_{\pi/2}^0 b^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t) dt = \\ &= -\frac{2b}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \frac{4b}{3\pi}. \end{aligned}$$

Пример 5. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение. Поскольку кардиоиды симметричны относительно полярной оси (Ox), то ордината центра тяжести $y_c = 0$ ($\varphi_c = 0$). Найдём абсциссу x_c . Вычислим вначале площадь фигуры:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Так как на сегменте $[0, \pi]$ функции $2 \cos \varphi$ и $\frac{1}{2} \cos 2\varphi$ центрально симметричны относительно точки $(\pi/2; 0)$, то интегралы от них обращаются в нуль. Поэтому $S = \frac{3\pi a^2}{2}$.

Вычислим по формуле (16) статический момент M_y :

$$M_y = \frac{1}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi = \\
&= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi (\cos \varphi + 3\cos^2 \varphi + 3\cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \\
&= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi \left(\cos \varphi + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\varphi) + 3\cos^3 \varphi + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi)^2 \right) d\varphi = \\
&= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi \left(\cos \varphi + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\varphi) + 3\cos^3 \varphi + \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) \right) d\varphi = \\
&= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi \left(\cos \varphi + \frac{15}{8} + \frac{3}{2}\cos 2\varphi + 3\cos^3 \varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi \right) d\varphi.
\end{aligned}$$

Поскольку все слагаемые под знаком интеграла, за исключением $\frac{15}{8}$, являются функциями, имеющими центр симметрии в середине отрезка $[0, \pi]$ оси абсцисс, то интегралы от них равны нулю, и поэтому $M_y = \frac{5\pi a^3}{4}$.

Окончательно находим: $x_c = M_y / S = 5a/6$. Очевидно, что в данном случае $r_c = x_c = 5a/6$.

Пример 6. Пользуясь теоремами Гульдина, найдите площади поверхностей и объёмы торов, образованных вращением круга $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ вокруг осей Ox и Oy ($a \geq r, b \geq r$).

Решение. Если круг вращается вокруг оси Ox , то центр тяжести круга отстоит от оси вращения на расстоянии b , поэтому площадь поверхности, согласно первой теореме Гульдина, равна

$$S_x = 2\pi r \cdot 2\pi b = 4\pi^2 br,$$

а объём, согласно второй теореме Гульдина, равен

$$V_x = \pi r^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 br^2.$$

Если же вращение происходит вокруг оси Oy , то расстояние от центра тяжести круга до оси Oy равно a . Тогда

$$S_y = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar, \quad V_y = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 ar^2.$$

9.3. Вычисление пути, работы переменной силы и другие примеры простейших физических задач

Определённые интегралы, как известно, имеют обширнейшие приложения. Рассмотрим в качестве примеров некоторые из физических задач, решение которых приводит к необходимости вычисления определённых интегралов.

Задача 1. Найти путь S , пройденный материальной точкой, движущейся прямолинейно с непрерывной переменной скоростью $v(t)$ (как функция времени t) за промежуток времени $a \leq t \leq b$.

Решение. Посчитаем путь, пройденный точкой за бесконечно малый промежуток времени $[t, t + dt]$. На этом промежутке скорость $v(t)$ приближённо можно считать постоянной. Поэтому элементарный путь равен $dS = v(t)dt$. Интегрируя данное равенство в пределах от a до b , получим весь путь

$$S = \int_a^b v(t) dt.$$

Пример 1. Скорость точки в зависимости от времени меняется по закону $v(t) = 0,1t^3$ м/сек. Найти путь S , пройденный точкой за промежуток времени $T = 10$ сек, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения точки за этот промежуток?

Решение. Находим

$$S = \int_0^T v(t) dt = \int_0^{10} 0,1 \cdot t^3 dt = 0,1 \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_0^{10} = 250 \text{ м};$$

$$v_{cp} = \frac{S}{T} = \frac{250}{10} = 25 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Найти работу A непрерывной переменной силы $F(x)$, приложенной к материальной точке M , при перемещении последней вдоль оси Ox из положения $x = a$ в положение $x = b$, предполагая, что направление действия силы совпадает с направлением перемещения.

Решение. Пусть точка M переместилась из положения x в положение $x + dx$. На бесконечно малом промежутке $[x, x + dx]$ длины dx силу $F(x)$ приближённо можно считать постоянной. Поэтому элементарная работа силы равна $dA = F(x)dx$. Интегрируя равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, определяем всю работу

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 м, если сила в 1 ньютон растягивает её на 0,01 м?

Решение. Согласно закону Гука упругая сила F , действующая на пружину, возрастает пропорционально растяжению x пружины, т.е. $F(x) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Здесь перемещение x выражено в метрах, а сила F – в ньютонах. Для определения коэффициента пропорциональности k согласно условию задачи полагаем $F = 1$ при $x = 0,01$, откуда находим $k = 100$ и, следовательно, $F(x) = 100x$. Используя указанную выше формулу, находим искомую работу

$$A = \int_0^{0,06} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,06} = 0,18 (\text{дж}).$$

Задача 3. Известно, что концентрация C вещества ($\text{г}/\text{м}^3$) в воде меняется по закону $C(x) = \frac{10x}{x+1}$ (x – глубина слоя в метрах). Сколько вещества Q содержится в вертикальном столбе воды, площадь поперечного сечения которого равна $S = 1$ (м^2), а глубина меняется от 0 м до 200 м?

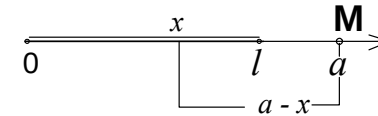
Решение. Рассмотрим бесконечно тонкий горизонтальный слой столба воды с сечением S и толщиной dx , находящийся на глубине x . Количество вещества, содержащегося в этом слое, равно $dQ = C \cdot S dx = \frac{10x}{x+1} dx$. Интегрируя это равенство в пределах от 0 до 200, получим полное количество вещества

$$Q = \int_0^{200} \frac{10x}{x+1} dx = 10 \int_0^{200} \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = 10(x - \ln(x+1)) \Big|_0^{200} = 1947 \text{ (г)}.$$

Задача 4. С какой силой однородный стержень $0 \leq x \leq l$ линейной плотности ρ притягивает материальную точку M , расположенную на той же прямой на расстоянии a ($a > l$) от начала координат и имеющую массу m ?

Решение. Согласно закону Ньютона бесконечно малый элемент стержня $[x, x+dx]$ массы ρdx притягивает материальную точку M с силой, величина которой равна $dF = -k \frac{m\rho dx}{(a-x)^2}$, где k – коэффициент пропорцио-

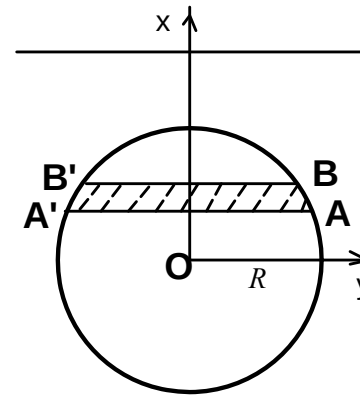
нальности (гравитационная постоянная). Так как эти силы притяжения действуют в одном и том же направлении, то величины их dF можно алгебраически складывать, а следовательно, и интегрировать (так как интеграл – предел алгебраической суммы):



$$F = -km\rho \int_0^l \frac{dx}{(a-x)^2} = -km\rho \cdot \frac{1}{a-x} \Big|_0^l = -\frac{km\rho l}{a(a-l)}.$$

Задача 5. Определить величину силы давления P воды на вертикальный круг радиуса R , центр которого погружён в воду на глубину H ($H > 2R$).

Решение.



В качестве оси Ox возьмём вертикальную прямую с началом координат O , совпадающим с центром круга. Разобьём круг на n узких горизонтальных полосок толщины соответственно Δx_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Рассмотрим k -ю полоску $AA'B'B$, удалённую от центра круга на величину x_k и имеющую толщину Δx_k . Если Δx_k – малая величина, то эту полоску приближённо можно принять за прямоугольник, и поэтому её площадь

$$\Delta S_k \approx AA' \cdot \Delta x_k = 2\sqrt{R^2 - x_k^2} \cdot \Delta x_k.$$

Считая, что уровень погружения этой полоски равен $H - x_k$, согласно закону Паскаля получим величину силы давления воды на эту полоску

$$\rho(H - x_k) \cdot \Delta S_k = 2\rho(H - x_k)\sqrt{R^2 - x_k^2} \cdot \Delta x_k,$$

где ρ – удельный вес воды. Суммируя эти выражения, получим приближённое значение величины силы давления P воды на всю пластинку

$$P \approx \sum_{k=1}^n 2\rho(H - x_k) \sqrt{R^2 - x_k^2} \cdot \Delta x_k.$$

Эта формула тем точнее, чем меньше Δx_k . В пределе при $n \rightarrow +\infty$ и $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$ получим точную формулу для величины силы давления воды

$$\begin{aligned} P &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n 2\rho(H - x_k) \sqrt{R^2 - x_k^2} \cdot \Delta x_k = \\ &= 2\rho \int_{-R}^R (H - x) \sqrt{R^2 - x^2} dx = \pi \rho R^2 H. \end{aligned}$$

Задача 6. Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h = 3,5$ м и радиусом основания $r = 1,5$ м, на его стенки, если удельная плотность бензина $\rho = 900$ кг/м³.

Решение. Элемент силы давления на поверхность стенки в выделенной полоске выразится так: $dP = \rho g \cdot 2\pi r x dx$, отсюда

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \rho g \int_0^h x dx = \pi \rho g h^2 = 9,8\pi \cdot 1,5 \cdot 3,5^2 \cdot 900 = 161700\pi \text{ (Н)} = \\ &= 161,7\pi \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Задача 7. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из ёмкости, имеющей форму горизонтально расположенного полуцилиндра, длина которого a , радиус боковых сторон (полукругов) — r .

Решение. Объём элементарного слоя воды, находящегося на глубине x и имеющего длину a , ширину $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ и толщину dx , равен

$$dV = amdx = 2a\sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Элементарная работа, совершаемая при поднятии этого слоя воды на высоту x , равна $dA = 2\rho g a x \sqrt{r^2 - x^2} dx$, где ρ — плотность воды. Следовательно,

$$A = 2\rho g a \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\rho g a \left(\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) \bigg|_0^r = \frac{2}{3} \rho g a r^3.$$

Задача 8. Какую работу нужно затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности земли радиуса R на высоту h ?

Решение. Сила, действующая на тело массы m , равна $F = k \frac{mM}{r^2}$, где r — расстояние от центра земли. Так как при $r = R$ имеем $F = mg$, то $kM = gR^2$. Искомая работа будет

$$A = \int_R^{R+h} k \frac{mM}{r^2} dr = kmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{mgh}{1 + (h/R)}.$$

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к §9

1. Найдите массу стержня длины 1м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\rho = 20x + 0,15x^2$, где x — расстояние от одного из концов стержня (в метрах), ρ — в кг/м.

2. Линейная плотность стержня $0 \leq x \leq l$ длины l равна $\rho = \rho_0 \sin \frac{\pi x}{l}$, где ρ_0 — постоянная. Найдите массу стержня.

3. Найдите статический момент и момент инерции дуги цепной линии $y = ach \frac{x}{a}$, где $0 \leq x \leq a$, относительно оси Ox .

4. Найдите статический момент дуги параболы $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq p/2$) относительно прямой $x = p/2$.

5. Найдите статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием a и высотой h относительно его основания.

6. Найдите момент инерции параболического сегмента, ограниченного параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$, относительно оси Ox .

7. Найдите моменты инерции однородной прямоугольной пластинки со сторонами a и b , относительно осей симметрии этого прямоугольника.

8. Найдите моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно её главных осей.

9. Найдите момент инерции однородного круга радиуса R и массы M относительно его диаметра.

10. Найдите координаты центра тяжести дуги окружности $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$).

11. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболой $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$).

12. Найдите координаты центров тяжести полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и полукруга, ограниченного этой полуокружностью и осью Ox .

13. Найдите координаты центров тяжести фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \cos x$.

14. Найдите координаты центров тяжести фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \sin x$.

15. Найдите координаты центров тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

16. Найдите координаты центров тяжести дуги астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (в 1-й четверти).

17. Найдите координаты центров тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

18. С помощью второй теоремы Гульдина найдите объём «баранки», полученной вращением окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси Oy .

19. Пользуясь теоремой Гульдина, найдите объём тела, образованного вращением полукруга радиуса r вокруг касательной, параллельной диаметру.

20. Пользуясь теоремой Гульдина, докажите, что центр тяжести треугольника отстоит от его основания на одну треть высоты.

21. Применяя вторую теорему Гульдина, найдите координаты центра тяжести четверти круга $x^2 + y^2 \leq r^2$.

22. Пользуясь теоремой Гульдина, найдите объём тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 и 8 вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикулярно диагонали.

23. Интегрированием найдите объём обелиска, основаниями которого служат прямоугольники со сторонами A , B и a , b , а высота равна H .

24. Интегрированием найдите объём шара радиуса R .

25. Удельная теплоёмкость вещества при температуре t равна $c = 0,2 + 0,001t$ (Дж/(г°С)). Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы нагреть 1г вещества от 0°C до 100°C ?

26. Найдите силу давления воды на вертикальный полукруглый щит радиуса a , диаметр которого находится на поверхности воды.

27. В жидкость с плотностью ρ погружена треугольная пластинка вершиной вверх. Найдите силу давления жидкости на пластинку, если основание треугольника равно a , высота равна h . Вершина треугольника расположена на поверхности.

28. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 , без учёта сопротивления воздуха определяется по формуле $v = v_0 - gt$, где t – протекшее время, g – ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t секунд после броска?

29. Скорость точки меняется по закону $v = 100 + 8t$ (где v выражается в м/с). Какой путь пройдёт эта точка за промежуток времени $[0, 10]$?

30. Скорость движения точки $v = te^{-0.01t}$ (м/с). Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

31. Скорость точки изменяется по закону $v = 2(6 - t)$ (где v выражается в м/с). Каково наибольшее удаление точки от начала движения?

32. Точка движется по оси Ox , начиная от точки $M(1; 0)$, так, что скорость её равна абсциссе. Где она будет через 10 сек от начала движения?

33. Ракетный снаряд поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной тяге ускорение ракеты за счёт уменьшения её веса растёт по закону $y = A/(a - bt)$ ($a - bt > 0$), найдите скорость v в любой момент времени t , если начальная скорость равна нулю. Найдите также высоту h , достигнутую ракетой к моменту времени $t = t_1$.

34. Вычислите работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания R и высоту H .

35. Найдите работу, совершаемую при выкачивании воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания равен r и высота равна h .

36. Вычислите кинетическую энергию диска массы M и радиуса R , вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости.

МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

10.1. История вопроса

В классическом математическом анализе, как отмечалось выше, основным объектом изучения являются непрерывные функции, заданные на конечных или бесконечных интервалах и обладающие более или менее высокой степенью гладкости.

Однако уже со 2-й половины XIX века развитие математики всё настоятельнее стало требовать систематического изучения функций более общего типа. Основной причиной этого являлось то, что предел последовательности непрерывных функций может быть разрывной функцией. Иными словами, класс непрерывных функций оказывается незамкнутым относительно важнейшей операции анализа – предельного перехода. В связи с этим функции, определяемые при помощи таких классических средств, как тригонометрические ряды, часто оказываются разрывными или недифференцируемыми. По той же причине могут быть разрывными производные непрерывных функций и т.п. Далее, дифференциальные уравнения, возникающие при рассмотрении физических задач, иногда не имеют решений в классе достаточно гладких функций, но имеют их в более широких классах функций. Всё это стимулировало развитие *метрической теории функций*, большой вклад в которую был сделан московской математической школой (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин, А.Я. Хинчин, Д.Е. Меньшов, А.Н. Колмогоров и другие).

Определение интеграла Римана как предела интегральных сумм удобно, когда подынтегральная функция непрерывна на промежутке интегрирования. Разрывные функции часто оказываются неинтегрируемыми в указанном смысле. В частности, производная $F'(x)$ непрерывной функции может быть неинтегрируемой по Риману. Таким образом, операция интегрирования, ставящая в соответствие функции $f(x)$ функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, не

может считаться полностью решающей задачу восстановления первообразной функции по производной. Не менее важно и то, что предел последовательности интегрируемых функций (даже будучи ограниченным) может уже не быть интегрируемым. Эти и некоторые другие недостатки классического опреде-

ления интеграла (Римана) привели А. Лебега к важному обобщению понятия интеграла.

Прежде, чем перейти к определению интеграла Лебега, напомним некоторые определения из теории множеств и рядов, необходимые для уяснения последующего материала этого параграфа.

10.2. Используемые понятия

10.2.1. Эквивалентные множества. Операции над множествами

Говорят, что между элементами двух множеств установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу первого множества поставлен в соответствие некоторый элемент второго множества так, что при этом каждый элемент второго множества соответствует только одному элементу первого множества.

Два множества называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Если множества A и B эквивалентны, то пишут $A \sim B$.

Например, эквивалентными являются множества $\{1;2;3;4;\dots\}$ и $\{2;4;6;8;\dots\}$, сегменты $[0,1]$ и $[a,b]$, интервал (a,b) и числовая прямая $R = (-\infty, +\infty)$.

Если два множества эквивалентны, то говорят, что они имеют одинаковую *мощность*.

К основным операциям над множествами относятся следующие.

Объединением (суммой) множеств $E_1, E_2, \dots, E_n$ называется множество

$E = \bigcup_{k=1}^n E_k$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств E_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Объединение множеств E_1 и E_2 будем обозначать символом $E_1 \cup E_2$ или $E_1 + E_2$.

Пересечением множеств $E_1, E_2, \dots, E_n$ называется множество

$E = \bigcap_{k=1}^n E_k$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств E_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Пересечение множеств E_1 и E_2 будем обозначать символом $E_1 \cap E_2$ или $E_1 E_2$.

Точно так же определяются объединение $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ и пересечение

$E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$ счётного (см. следующий пункт) числа множеств.

Разностью множеств E_1 и E_2 называется множество $E = E_1 \setminus E_2$, которое состоит из всех элементов множества E_1 , не содержащихся в E_2 .

10.2.2. Счётные и несчётные множества

Множество называется *счётным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел (иными словами, множество называется счётным, если его элементы можно занумеровать с помощью натуральных чисел).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Бесконечное подмножество счётного множества также счётно.

Теорема 2. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств есть счётное множество.

Теорема 3. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счётно.

Теорема 4. Множество точек разрыва монотонной функции конечно или счётно.

Теорема 5. Множество всех рациональных чисел сегмента $[0,1]$ счётно, а множество всех вещественных чисел этого же сегмента несчётно¹.

Если множество эквивалентно множеству всех вещественных чисел сегмента $[0,1]$, то говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

Теорема 6. Множество иррациональных чисел сегмента $[0,1]$ и множество всех иррациональных чисел из R имеют мощность континуума.

Теорема 7. Пусть A – бесконечное множество, B – конечное или счётное множество, тогда:

- а) $A + B \sim A$;
- б) если $A \setminus B$ – бесконечное множество, то $A \setminus B \sim A$.

Пример 1. Доказать, что интервал $(0,1) = I$ и числовая прямая R – эквивалентные множества: $R \sim I$.

Решение. Чтобы доказать эквивалентность множеств I и R , необходимо установить между их элементами взаимно однозначное соответствие. Такое соответствие, например, осуществляет функция

$$y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in I.$$

¹ Доказательство можно найти, например, в [9], с. 61–63.

В самом деле, каждому $x \in I$ эта функция ставит в соответствие некоторое $y \in R$, а так как она непрерывна и возрастает на I и, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \quad \text{то } \forall y \in R \text{ существует}$$

единственное $x \in I$ такое, что $y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$. Это и означает, что между

элементами множеств I и R установлено взаимно однозначное соответствие. Итак, $R \sim I$.

Пример 2. Доказать, что интервал $(0,1) = I$ и сегмент $[0,1] = S$ – эквивалентные множества: $S \sim I$.

Решение. Пусть Q – множество всех рациональных чисел сегмента S . Это множество счётное. Положим $\bar{Q} = S \setminus Q$, тогда $S = Q + \bar{Q}$. Удалим из множества Q точки 0 и 1. Получим счётное множество Q_1 рациональных чисел интервала I . Очевидно, $I = Q_1 + \bar{Q}$. Так как Q и Q_1 – счётные множества, то $Q \sim Q_1$. Отсюда следует, что $Q + \bar{Q} \sim Q_1 + \bar{Q}$, т.е. $S \sim I$.

Замечание. Из утверждений примеров 1 и 2 следует, что числовая прямая R (множество всех вещественных чисел) имеет мощность континуума.

10.2.3. Открытые и замкнутые множества

Пусть E – произвольное числовое множество. Точка x называется *внутренней* точкой E , если существует окрестность точки x , целиком принадлежащая E .

Множество E называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество E называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Например, интервал (a,b) – открытое множество, а сегмент $[a,b]$ – замкнутое множество.

Пример 3. Пусть E – открытое множество и $E \subset [a,b]$. Доказать, что $G = [a,b] \setminus E$ – замкнутое множество.

Решение. Достаточно доказать, что G содержит все свои предельные точки. Из определения разности множеств следует, что $\forall x \in [a,b]$ либо $x \in E$, либо $x \in G$. Пусть x – предельная точка множества G , т.е. в любой окрестности точки x имеются точки множества G , отличные от x .

Очевидно, $x \in [a, b]$. Докажем, что $x \in G$. Предположим противное. Тогда $x \in E$, и так как E – открытое множество, то существует окрестность точки x , целиком принадлежащая E . Следовательно, в этой окрестности точки x нет ни одной точки из множества G , но это противоречит тому, что x – предельная точка G . Полученное противоречие доказывает, что $x \in G$, и, значит, G – замкнутое множество.

Аналогично можно доказать, что если E – замкнутое множество и $E \subset (a, b)$, то $G = (a, b) \setminus E$ – открытое множество.

Следующие теоремы из теории множеств отражают основополагающие свойства открытых и замкнутых множеств.

Теорема 1 (об объединении открытых множеств). Объединение конечного или счётного числа открытых множеств является открытым множеством.

Теорема 2 (о пересечении открытых множеств). Пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством, а пересечение счётного числа открытых множеств может не быть открытым множеством.

Теорема 3 (о структуре открытых множеств). Любое открытое множество на прямой является объединением конечного или счётного числа попарно непересекающихся интервалов.

Теорема 4 (о пересечении замкнутых множеств). Пересечение конечного или счётного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Теорема 5 (об объединении замкнутых множеств). Объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством, а объединение счётного числа замкнутых множеств может не быть замкнутым множеством.

10.2.4. Числовой ряд и его сумма. Сходимость ряда

Пусть $\{a_n\}$ – числовая последовательность. Образует формально выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

и назовём его *числовым рядом* (или просто *рядом*). Числа a_k называются

членами ряда, а число $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ – его n -й *частичной суммой*.

Рассмотрим последовательность $\{S_n\}$. Если существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, то

говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится*, а число S называется *суммой ряда*.

10.3. Мера множества²

Мера множества – обобщение понятия длины отрезка, площади плоской фигуры и объёма тела на множества более общей природы. В данном параграфе речь будет идти о понятии меры ограниченного множества на прямой.

Мерой интервала (a, b) , где $a < b$, назовём его длину, т.е. число $b - a$.

Пусть G – ограниченное открытое множество. Тогда в силу леммы его можно представить в виде $G = \bigcup_{k=1} (a_k, b_k)$, где (a_k, b_k) – попарно непересекающиеся интервалы.

Мерой μG открытого ограниченного множества G назовём сумму длин составляющих его интервалов: $\mu G = \sum_{k=1} (b_k - a_k)$.

Отметим, что если число интервалов (a_k, b_k) счётно, то сумма длин интервалов является числовым рядом $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k)$ с положительными членами $(b_k - a_k)$. В силу ограниченности множества G этот ряд сходится.

Пусть E – произвольное ограниченное множество. Рассмотрим всевозможные ограниченные открытые множества G , содержащие E . Множество $\{\mu G\}$ мер этих множеств ограничено снизу (например, числом 0) и, следовательно, имеет $\inf \{\mu G\}$.

Число $\bar{\mu} E = \inf \{\mu G\}$ называется *внешней (верхней) мерой* множества E . *Внутренняя (нижняя) мера $\underline{\mu} E$* множества E определяется как разность $\mu G - \bar{\mu}(G \setminus E)$, где G – какой-либо интервал, содержащий множество E , и $G \setminus E$ – множество всех точек этого интервала, не содержащихся в E .

Множество E называется *измеримым (по Лебегу)*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует открытое множество G , содержащее E , для которого $\bar{\mu}(G \setminus E) < \varepsilon$. Иными словами, множество E , для которого внешняя мера равна внутренней, называют *измеримым (по Лебегу)*. При этом общее значение внешней и внутренней мер этого множества называется его *мерой (Лебега)* и обозначается μE , т.е. $\mu E = \bar{\mu} E = \underline{\mu} E$.

Замечание 1. Все измеримые множества предполагаются ограниченными.

² Излагается, в основном, в соответствии с [13].

Замечание 2. Любое множество точек на прямой, имеющее длину в элементарном смысле (интервал, сегмент), измеримо по Лебегу, и его мера совпадает с его длиной. Однако на прямой существуют множества, не имеющие длины в обычном смысле (не спрямляемые), но при этом являющиеся измеримыми. Для этих более сложных множеств роль длины играет мера.

Замечание 3. Для открытого множества E это определение меры эквивалентно определению меры, данному выше (в качестве G достаточно взять само E).

Замечание 4. Пустое множество $\emptyset$ считается измеримым, при этом $\mu \emptyset = 0$.

Пример. Доказать, что множество Q всех рациональных чисел произвольного сегмента $[a, b]$ измеримо, причём $\mu Q = 0$.

Решение. Множество Q счётно, поэтому его точки можно занумеровать с помощью натуральных чисел. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и заключим первую точку множества Q в интервал длины $\varepsilon/2$, вторую – в интервал длины $\varepsilon/2^2$, ..., n -ю – в интервал длины $\varepsilon/2^n$ и т.д. Объединение этих интервалов является открытым множеством G , мера которого

$$\mu G < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

В силу того, что ε произвольно мало, отсюда следует, что внешняя мера $\bar{\mu}Q = 0$. Так как $(G \setminus Q) \subset G$, то $\bar{\mu}(G \setminus Q) \leq \bar{\mu}G = \mu G < \varepsilon$. Это означает по определению, что Q измеримо, причём $\mu Q = \bar{\mu}Q = 0$ (в таком случае говорят, что множество Q имеет меру нуль (по Лебегу)).

Замечание 5. Множество Q всех рациональных точек сегмента $[a, b]$ и множество $\bar{Q}$ всех иррациональных точек того же сегмента сходны в том смысле, что каждое из них всюду плотно на сегменте $[a, b]$, т.е. что между любыми двумя точками указанного сегмента найдутся как точки множества Q , так и точки множества $\bar{Q}$. В то же время, как следует из рассмотренного примера, они резко различаются по мере: $\mu Q = 0$, а $\mu \bar{Q} = \mu[a, b] = b - a$.

Свойства меры Лебега во многом аналогичны соответствующим свойствам длины. Приведём два основных свойства.

1°. Мера любого (измеримого) множества неотрицательна: $\mu E \geq 0$.

2°. Объединение (если оно ограничено) и пересечение конечного или счётного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами.

При этом мера суммы $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ конечной или счётной системы попарно непересекающихся (измеримых) множеств $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ ($E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$) равна сумме их мер:

$$\mu E = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu E_k$$

(свойство счётной аддитивности меры Лебега).

В следующих двух теоремах сформулированы достаточные условия измеримости двух важных видов множеств.

Теорема 1 (об измеримости замкнутого ограниченного множества). Любое замкнутое ограниченное множество измеримо.

Теорема 2 (об измеримости дополнения до сегмента). Если E – измеримое множество и $E \subset [a, b]$, то множество $\bar{E} = [a, b] \setminus E$ (дополнение множества E до сегмента $[a, b]$) измеримо, причём $\mu \bar{E} = \mu[a, b] - \mu E$.

10.4. Измеримые функции

Важнейшим классом функций, изучаемым в метрической теории функций, является класс так называемых измеримых функций. Приведём соответствующие определения.

Пусть функция $f(x)$ определена на измеримом множестве E и, возможно, не ограничена на нём. Символом $\{x \in E \mid f(x) \leq c\}$ будем обозначать множество всех таких значений аргумента x , принадлежащих множеству E , для которых $f(x) \leq c$ (c – заданное число).

Функция $f(x)$ называется *измеримой на множестве E* , если для любого действительного числа c множество $\{x \in E \mid f(x) \leq c\}$ измеримо.

Заметим, что если $f(x)$ измерима на E , то измеримы все множества:

$$\{x \in E \mid f(x) \geq c\}, \{x \in E \mid f(x) > c\}, \{x \in E \mid f(x) = c\}, \\ \{x \in E \mid f(x) < c\}.$$

Пример 1. Доказать, пользуясь определением, что функция Дирихле $D(x)$ измерима на $[a, b]$.

Решение. По определению измеримой функции, нужно доказать, что $\forall c$ множество $\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq c\} \equiv E_c$ измеримо. Рассмотрим три случая.

Если $c \geq 1$, то $E_c = [a, b]$ – измеримое множество.

Если $0 \leq c < 1$, то $E_c = \overline{Q}$, где $\overline{Q}$ – множество всех иррациональных чисел $[a, b]$ – измеримое множество.

Если $c < 0$, то $E_c = \emptyset$ ($\emptyset$ – измеримое множество).

Итак, $D(x)$ – измеримая функция.

Пример 2. Доказать, что непрерывная функция $f(x)$ измерима на $[a, b]$.

Решение. Докажем, что $\forall c$ множество $\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq c\} \equiv E_c$ измеримо. Если $E_c = \emptyset$, то E_c измеримо: $\mu E_c = \mu \emptyset = 0$. Пусть E_c не пусто. Докажем, что E_c – замкнутое множество. Отсюда будет следовать, что E_c измеримо. Пусть x_0 – предельная точка множества E_c . Покажем, что $x_0 \in E_c$. Ясно, что $x_0 \in [a, b]$. Согласно определению предельной точки $\exists \{x_n\} \rightarrow x_0$, причём $\forall n \ x_n \in E_c$. Из непрерывности $f(x)$ в точке x_0 следует, что $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$, а так как $x_n \in E_c$, то $f(x_n) \leq c$. Значит, $f(x_0) \leq c$, т.е. $x_0 \in E_c$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим некоторые свойства измеримых функций.

1°. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E , то она измерима на любом измеримом подмножестве множества E .

2°. Если функция $f(x)$ измерима на каждом из множеств $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ (их количество конечно или счётно), то она измерима на их объединении $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ и пересечении $\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$.

3°. Если функция $f(x)$ определена на множестве E меры нуль, то она измерима на этом множестве.

4°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E , то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ (при условии $g(x) \neq 0$) также измеримы на множестве E (таким образом, класс измеримых функций замкнут относительно указанных арифметических операций).

5°. Непрерывные функции измеримы на любом измеримом множестве.

6°. На множестве меры нуль все функции измеримы.

7°. Абсолютная величина измеримой функции есть измеримая функция.

Говорят, что некоторое свойство справедливо *почти всюду* на множестве E , если множество точек из E , на котором оно не выполняется, имеет меру нуль.

Функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые на измеримом множестве, называются *эквивалентными на этом множестве*, если они равны почти всюду на нём. Обозначение эквивалентных функций: $f(x) \approx g(x)$ на E .

Например, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррационально;} \\ 1, & \text{если } x - \text{рационально,} \end{cases}$$

эквивалентна на произвольном сегменте $[a, b]$ непрерывной функции $g(x) \equiv 0$, так как множество точек x сегмента $[a, b]$, в которых $D(x) \neq g(x)$, является множеством Q всех рациональных чисел сегмента $[a, b]$, мера которого $\mu Q = 0$. Заметим, что функция $D(x)$ разрывна во всех точках $[a, b]$ (и неинтегрируема по Риману).

8°. Если $g(x)$ измерима на E и $f(x) \approx g(x)$ на E , то $f(x)$ измерима на E .

9°. (Теорема Лузина, или *C-свойство измеримых функций*). Для того чтобы функция $f(x)$ была измерима на сегменте $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовала непрерывная на $[a, b]$ функция $g(x)$ такая, что $\mu\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\} \leq \varepsilon$.

Теорема Лузина означает, что любая измеримая на $[a, b]$ функция может быть сделана непрерывной путём изменения её на множестве сколь угодно малой меры, т.е. измеримые функции в этом смысле близки к непрерывным функциям.

Пользуясь теоремой Лузина, несложно показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1/2; \\ 1, & \text{если } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

является измеримой на сегменте $[0, 1]$.

10°. Класс измеримых функций замкнут относительно операции предельного перехода. А именно, если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ измеримы на множестве E и для каждого $x \in E$ существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, то этот предел также является измеримой на E функцией.

10.5. Интеграл Лебега

Итак, рассмотрим интеграл Лебега – одно из наиболее важных обобщений понятия интеграла, предложенное в 1902 г. А. Лебегом³ и основанное на разработанной им теории меры.

10.5.1. Определение интеграла Лебега от ограниченной функции

Пусть E – произвольное измеримое множество. Разбиением множества E назовём любую совокупность $T = \{E_k\}$ конечного числа измеримых множеств $E_1, E_2, \dots, E_n$ такую, что $\bigcup_{k=1}^n E_k = E$, где $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Пусть на множестве E определена ограниченная функция $f(x)$. Для произвольного разбиения $T = \{E_k\}$ положим

$$M_k = \sup_{E_k} f(x), \quad m_k = \inf_{E_k} f(x)$$

и составим две суммы:

$$S_T = \sum_{k=1}^n M_k \mu E_k, \quad s_T = \sum_{k=1}^n m_k \mu E_k.$$

Числа S_T и s_T называют, соответственно, *верхней* и *нижней суммами* разбиения T . Очевидно, $\forall T \quad s_T \leq S_T$.

Замечание. Если разбиение T_2 получено из разбиения $T_1 = \{E_k\}$ с помощью разбиений каких-то из E_k (т.е. путём измельчения разбиения T_1), то $s_{T_1} \leq s_{T_2}$, $S_{T_1} \geq S_{T_2}$.

³ Лебег Анри Леон (1875–1941) – французский математик, один из основателей современной теории функций действительного переменного.

Рассмотрим числовые множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ всевозможных нижних и верхних сумм. Они ограничены снизу числом $m \cdot \mu E$, а сверху – числом $M \cdot \mu E$, где $m = \inf_E f(x)$, $M = \sup_E f(x)$, и, следовательно, имеют точные грани.

Числа

$$\underline{I} = \sup_T \{s_T\} \quad \text{и} \quad \bar{I} = \inf_T \{S_T\}$$

называются, соответственно, *нижним* и *верхним интегралами Лебега*. Очевидно, что

$$\underline{I} \leq \bar{I}.$$

Ограниченная на измеримом множестве E функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* на этом множестве, если

$$\underline{I} = \bar{I}.$$

При этом число $I = \underline{I} = \bar{I}$ называется *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается

$$\int_E f(x) d\mu(x).$$

На множестве E меры нуль всякая функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу и

$$\int_E f(x) d\mu(x) = 0.$$

10.5.2. Связь между интегралами Римана и Лебега. Класс интегрируемых по Лебегу ограниченных функций

Теорема 1 (о связи между интегралами Римана и Лебега). Всякая функция, интегрируемая по Риману на сегменте $[a, b]$, является интегрируемой на $[a, b]$ по Лебегу, причём интегралы Римана и Лебега от такой функции равны.

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции по Лебегу). Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве E функция $f(x)$ была интегрируема по Лебегу на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была измеримой на E .

10.5.3. Интеграл Лебега как предел лебеговских интегральных сумм

Пусть $f(x)$ – ограниченная измеримая функция на множестве E , $m = \inf_E f(x)$, $M = \sup_E f(x)$, и пусть $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ – произвольные числа такие, что $m = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = M$.

Лебеговским разбиением множества E называется разбиение $T = \{E_k\}$, где $E_1 = \{x \in E \mid y_0 \leq f(x) \leq y_1\}$, $E_k = \{x \in E \mid y_{k-1} < f(x) \leq y_k\}$, $k = 2, 3, \dots, n$.

Пусть ξ_k – произвольная точка из E_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Число

$$I(E_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \mu E_k$$

называется лебеговской интегральной суммой (если какое-то $E_k = \emptyset$, то E_k не содержит ни одной точки ξ_k , и соответствующее слагаемое в сумме считаем равным нулю). Положим $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \delta_k$, где $\delta_k = y_k - y_{k-1}$.

Теорема. Предел лебеговских интегральных сумм при $\delta \rightarrow 0$ равен интегралу Лебега:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I(E_k, \xi_k) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Из этой теоремы следует, что интеграл Лебега можно определить как предел лебеговских интегральных сумм при $\delta \rightarrow 0$. Такое определение интеграла Лебега аналогично определению интеграла Римана с той разницей, что при составлении лебеговских интегральных сумм на частичные сегменты разбивается не область определения, а множество значений функции.

10.5.4. Свойства интеграла Лебега

Интеграл Лебега обладает свойствами, во многом аналогичными свойствам интеграла Римана. Приведём их.

$$1^\circ. \int_E d\mu(x) = \mu E.$$

2°. *Линейность интеграла.* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на множестве E , а α и β – произвольные числа, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на E , причём

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\mu(x) = \alpha \int_E f(x) d\mu(x) + \beta \int_E g(x) d\mu(x).$$

3°. *Аддитивность интеграла.* Если функция $f(x)$ интегрируема на E_1 и E_2 , где $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $f(x)$ интегрируема на $E_1 \cup E_2$, при этом выполняется равенство

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x) d\mu(x) = \int_{E_1} f(x) d\mu(x) + \int_{E_2} f(x) d\mu(x).$$

Вообще говоря, если $f(x)$ интегрируема на множестве E , являющемся суммой любого конечного или счётного числа попарно непересекающихся измеримых множеств $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, то

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_k \int_{E_k} f(x) d\mu(x)$$

(полная аддитивность интеграла Лебега).

4°. *Интегрирование неравенств.* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на множестве E , причём $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in E$, то

$$\int_E f(x) d\mu(x) \geq \int_E g(x) d\mu(x).$$

5°. *Связь интегрируемости с абсолютной интегрируемостью.* Измеримая функция $f(x)$ интегрируема на множестве E тогда и только тогда, когда интегрируема её абсолютная величина $|f(x)|$, причём

$$\left| \int_E f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_E |f(x)| d\mu(x).$$

6°. Если $f(x)$ интегрируема на множестве E , то она интегрируема и на всяком его измеримом подмножестве.

7°. Если интегрируемую функцию $f(x)$ изменить на множестве меры нуль, то это не отразится ни на её интегрируемости, ни на величине интеграла.

$$8^\circ. \text{ Если } f(x) \geq 0 \text{ и } \int_E f(x) d\mu(x) = 0, \text{ то } f(x) \approx 0.$$

9°. Если $f(x)$ интегрируема на множестве E , то всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что

$$\left| \int_e f(x) d\mu(x) \right| < \varepsilon$$

для любого измеримого множества $e \subset E$ с мерой $\mu e < \delta$. Это свойство называют *абсолютной непрерывностью* интеграла Лебега.

10°. *Предельный переход под знаком интеграла.* Если функции $f_1(x)$, $f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ интегрируемы на множестве E , и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на E , причём существует такая интегрируемая на E функция $\Phi(x)$, что $|f_n(x)| \leq \Phi(x)$ для всех n , то предельная функция $f(x)$ также интегрируема на E и допустим предельный переход под знаком интеграла, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

11°. Если функция $F(x)$ имеет ограниченную производную $F'(x)$, то последняя интегрируема по Лебегу и

$$F(x) = \int_a^x F'(x) dx + C,$$

где интеграл понимается по Лебегу. Таким образом, интеграл Лебега до конца решает задачу восстановления первообразной по ограниченной производной.

12°. *Почленное интегрирование рядов неотрицательных измеримых функций.* Если функции $u_k(x) \geq 0$ ($k \in N$) измеримы на множестве E , то

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \right) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_E u_k(x) d\mu(x),$$

причём обе части этого равенства могут одновременно обращаться в $+\infty$.

13°. *Неравенство Буняковского для интегрируемых функций.* Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы (вместе со своими квадратами) на множестве E , тогда

$$\left(\int_E f(x)g(x) d\mu(x) \right)^2 \leq \left(\int_E f^2(x) d\mu(x) \right) \left(\int_E g^2(x) d\mu(x) \right).$$

14°. *Неравенство Коши для интегрируемых функций.* Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы (вместе со своими квадратами) на множестве E , тогда

$$\left(\int_E (f(x) + g(x))^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \left(\int_E f^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2} + \left(\int_E g^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Пример 1. Доказать, что функция Дирихле $D(x)$ интегрируема по Лебегу на произвольном сегменте $[a, b]$, и найти $\int_{[a,b]} D(x) d\mu(x)$.

Решение. 1-й способ. Так как $D(x) \geq 0$, то для любого разбиения T имеем $s_T \geq 0$, $S_T \geq 0$. Рассмотрим разбиение T^* сегмента $[a, b]$ на множество Q рациональных чисел и множество $\bar{Q}$ иррациональных чисел. Для этого разбиения

$$S_{T^*} = \sup_Q D(x) \mu Q + \sup_{\bar{Q}} D(x) \mu \bar{Q} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (b - a) = 0.$$

Таким образом, множество $\{S_T\}$ содержит число 0. Поэтому

$$\bar{I} = \inf \{S_T\} = 0.$$

Так как все $s_T \geq 0$, то $\underline{I} = \sup_T \{s_T\} \geq 0$, а поскольку $\underline{I} \leq \bar{I}$, получаем

$$\underline{I} = 0.$$

Итак, $\bar{I} = \underline{I} = 0$. Отсюда следует, что функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, причём $\int_{[a,b]} D(x) d\mu(x) = 0$.

2-й способ. Для любого лебеговского разбиения $T = \{E_k\}$ имеем

$$\mu E_1 = \mu \{x \in [a, b] \mid 0 \leq D(x) \leq y_1 < 1\} = \mu \bar{Q} = b - a,$$

$$f(\xi_1) = 0 \quad \forall \xi_1 \in E_1; \quad \mu E_2 = \mu E_3 = \dots = \mu E_{n-1} = \mu \emptyset = 0;$$

$$\mu E_n = \mu \{x \in [a, b] \mid 0 < y_{n-1} < D(x) \leq 1\} = \mu Q = 0, \quad f(\xi_n) = 1 \quad \forall \xi_n \in E_n.$$

Поэтому $I(E_k, \xi_k) = f(\xi_1) \mu \bar{Q} + f(\xi_n) \mu Q = 0$, т.е. любая лебеговская интегральная сумма равна нулю. Следовательно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} I(E_k, \xi_k) = 0$, т.е.

функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, причём

$$\int_{[a,b]} D(x) d\mu(x) = 0.$$

Замечание. Известно, что функция $D(x)$ неинтегрируема по Риману на $[a, b]$. Последний пример показывает, что интегрируемая по Лебегу функция может быть неинтегрируемой по Риману.

Для более детального ознакомления с теорией меры и интеграла Лебега можно рекомендовать обратиться к недавно вышедшему учебному пособию по действительному анализу [6], содержащему доказательства сформулированных выше свойств измеримых функций и интеграла Лебега, а также большое количество задач (с решениями).

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к §10

1. Измеримо ли множество Q всех рациональных чисел? Если да, то чему равна его мера?

2. Измеримо ли множество $\overline{Q}$ всех иррациональных чисел? Если да, то чему равна его мера?

3. Докажите, что если функция $f(x) = 0$ почти всюду на измеримом множестве E , то она интегрируема по Лебегу, причём $\int_E f(x) d\mu(x) = 0$.

4. Докажите, что если ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на множестве E и функция $f(x)$ интегрируема на E , то функция $g(x)$ также интегрируема на E , причём

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E g(x) d\mu(x).$$

5. Докажите, что всякая функция, интегрируемая по Риману на $[a, b]$, является интегрируемой на $[a, b]$ по Лебегу, причём интегралы Римана и Лебега от такой функции равны.

6. Докажите, что ограниченная измеримая на множестве E функция интегрируема по Лебегу на этом множестве.

7. Докажите, что имеет место следующий критерий интегрируемости функций по Лебегу (аналогичный критерию интегрируемости по Риману): для того чтобы ограниченная на измеримом множестве E функция была интегрируема по Лебегу на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало такое лебеговское разбиение T множества E , для которого справедливо неравенство $S_T - s_T < \varepsilon$.

8. Докажите, что если функция $f(x)$ ограничена и измерима на множестве E , то предел её лебеговских интегральных сумм при $\delta \rightarrow 0$ ($\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \delta_k$, где $\delta_k = y_k - y_{k-1}$) равен интегралу Лебега от функции $f(x)$ по множеству E .

§ 11.

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

11.1. Понятие об интеграле Стильеса как линейном функционале на пространстве непрерывных функций

Обратимся ещё к одному обобщению интеграла Римана – интегралу Стильеса⁴. Он отражает другую особенность интеграла Римана по сравнению с интегралом Лебега. Если введение меры и интеграла Лебега позволили нам расширить класс измеримых множеств и класс интегрируемых функций, то введение интеграла Стильеса позволяет решить следующую задачу.

Рассмотрим множество $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$. Для каждой функции $f(x)$ из этого множества можно ввести величину

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

называемую *нормой функции* $f(x)$ в пространстве $C[a, b]$.

Заметим, что выражение $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ можно воспринимать как числовую функцию, заданную на этом пространстве, т.е. как *функционал*. Очевидно, что он является линейным: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ для любых чисел $\alpha, \beta \in R$ и любых функций $f, g \in C[a, b]$. Кроме того, этот функционал является *ограниченным*, т.е. существует число $M > 0$ такое, что для любой функции $f \in C[a, b]$ справедливо неравенство $|I(f)| \leq M \|f\|$.

Наименьшее из таких чисел M называется *нормой линейного функционала* I и обозначается $\|I\|$. Таким образом, интеграл Римана $I(f)$ задает линейный функционал на пространстве $C[a, b]$.

Наименьшее из таких чисел M называется *нормой линейного функционала* I и обозначается $\|I\|$. Таким образом, интеграл Римана $I(f)$ задает линейный функционал на пространстве $C[a, b]$.

⁴ Т. Стильес (1856–1894) – голландский математик.

С помощью интеграла Римана можно строить и другие функционалы на этом пространстве. Например, пусть функция $g(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Тогда можно определить линейный функционал по правилу

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Заметим, что если функция $G(x)$ является первообразной для функции $g(x)$ на сегменте $[a, b]$, то выражение $I_g(f)$ можно представить в виде

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)dG(x).$$

Для развития теории интегрирования и для некоторых её приложений, например, для теории вероятностей, вариационного исчисления, теоретической механики, важно иметь ответ на следующий вопрос: любой ли линейный функционал $\varphi(f)$ на пространстве $C[a, b]$ представим в таком виде, т.е. всегда ли найдётся такая функция $g(x)$, что

$$\varphi(f) = I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dG(x).$$

Несложно увидеть, что если мы имеем дело с обычным интегралом Римана, то ответ на этот вопрос будет отрицательным: например, функционал $\varphi(f) = f((a+b)/2)$ в таком виде представить нельзя. Но можно расширить понятие интеграла Римана таким образом, что уже любой линейный функционал $\varphi(f)$ на пространстве $C[a, b]$ можно будет представить в виде

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)dG(x).$$

Расширение понятия интеграла Римана в указанном

направлении и достигается введением понятия *интеграла Стильеса*.

11.2. Функции ограниченной вариации и их свойства.

Определение интеграла Стильеса

Для того чтобы определить понятие интеграла Стильеса, нам понадобится ввести новый класс функций.

Функция $f(x)$ называется *функцией с ограниченным изменением*, или *функцией ограниченной вариации*, на сегменте $[a, b]$, если существует веще-

ственное число $M > 0$ такое, что для любого разбиения $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ сегмента $[a, b]$ выполняется неравенство

$$V(f; T) = \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| < M.$$

Величина $V_a^b(f) = \sup_T V(f; T)$, где точная грань берётся по всем разбиениям сегмента $[a, b]$, называется *полным изменением* или *полной вариацией* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Отметим некоторые *свойства* функций ограниченной вариации.

1. Сумма двух функций ограниченной вариации есть функция ограниченной вариации.

Доказательство. Действительно, пусть $h(x) = f(x) + g(x)$. Тогда для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ выполнено:

$$V(h; T) \leq V(f; T) + V(g; T).$$

Отсюда следует, что полное изменение $V_a^b(h)$ функции $h(x)$ на $[a, b]$ не превосходит суммы полных изменений функций $f(x)$ и $g(x)$.

2. Любая ограниченная монотонная функция на сегменте $[a, b]$ является функцией ограниченной вариации на этом сегменте.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – ограниченная монотонная функция на сегменте $[a, b]$. Рассмотрим случай, когда $f(x)$ не убывает. Тогда для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ имеем:

$$V(f; T) = \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

3. Пусть $a < c < b$ и функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на сегменте $[a, b]$. Тогда $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Доказательство. Возьмём произвольные разбиения T_1 и T_2 сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно. Тогда $T = T_1 \cup T_2$ – разбиение сегмента $[a, b]$, причём $V(f; T) = V(f; T_1) + V(f; T_2)$.

Так как $V_a^c(f) = \sup_{T_1} V(f; T_1)$, $V_c^b(f) = \sup_{T_2} V(f; T_2)$, то получаем:

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = \sup_{T=T_1 \cup T_2} V(f; T) \leq \sup_T V(f; T) = V_a^b(f).$$

Возьмём теперь произвольное разбиение T сегмента $[a, b]$ и добавим к нему точку c . Получим разбиение T' , причём $T' = T_1 \cup T_2$, где T_1 – разбиение сегмента $[a, c]$, T_2 – разбиение $[c, b]$. Тогда $V(f; T) \leq V(f; T') = V(f; T_1) + V(f; T_2)$. Переходя в последнем неравенстве к точным верхним граням, получим, что

$$V_a^b(f) = \sup_T V(f; T) \leq \sup_{T_1} V(f; T_1) + \sup_{T_2} V(f; T_2) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Вместе с ранее доказанным противоположным неравенством это даёт:

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f),$$

что и требовалось доказать.

4. Любая функция ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$ может быть представлена в виде разности двух ограниченных монотонно возрастающих функций.

Доказательство. Обозначим $\varphi(x) = V_a^x(f)$, $a \leq x \leq b$. Тогда, по определению полной вариации функции на сегменте, функция $\varphi(x)$ не убывает и ограничена на $[a, b]$.

Далее, положим $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$. Пусть $x_1 > x_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(x_1) - \psi(x_2) &= \\ &= V_a^{x_1}(f) - V_a^{x_2}(f) - f(x_1) + f(x_2) = V_{x_2}^{x_1}(f) - (f(x_1) - f(x_2)) \geq 0, \end{aligned}$$

так как

$$V_{x_2}^{x_1}(f) = \sup_T \sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(a_{k-1})| \geq f(x_1) - f(x_2),$$

где $T: x_2 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = x_1$.

Значит, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются неубывающими. Тогда очевидно, что функцию $f(x)$ можно представить, например, в виде $f(x) = (\varphi(x) + x) - (\psi(x) + x)$, где функции $\varphi(x) + x$ и $\psi(x) + x$ строго возрастают.

5. Любая функция с конечным числом экстремумов на сегменте $[a, b]$ является функцией ограниченной вариации на этом сегменте.

Доказательство. Пусть сегменты $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, задают участ-

ки монотонности $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда $V_a^b(f) = \sum_{k=1}^n V_{x_{k-1}}^{x_k}(f)$, где

$$V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Пример. Найти полную вариацию функции $f(x) = \sin x$ на сегменте $[0, 2\pi]$.

Решение. Разобьём сегмент $[0, 2\pi]$ на промежутки монотонности функции $\sin x$: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Тогда, согласно свойствам 3 и 5, имеем:

$$V_0^x(\sin x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 2 - \sin x, & \text{если } \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 \text{ и } V_0^{2\pi}(\sin x) = 4. \\ 4 + \sin x, & \text{если } 3\pi/2 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Перейдём к определению интеграла Стильеса.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, а функция $g(x)$ имеет на этом сегменте ограниченную вариацию. Пусть $V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ – размеченное разбиение сегмента $[a, b]$; $T = T(V)$ – соответствующее ему неразмеченное разбиение. Обозначим $\Delta_k g = g(x_k) - g(x_{k-1})$ и рассмотрим сумму

$$\sigma_g(V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta_k g.$$

Выражение $\sigma_g(V) = \sigma_g(V; f)$ называется *интегральной суммой Стильеса* функции $f(x)$ по функции $g(x)$.

Если существует предел $\lim_{\Delta_V \rightarrow 0} \sigma_g(V) = I_g(f)$, т.е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_V < \delta$, выполнено: $|\sigma_g(V) - I_g(f)| < \varepsilon$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по функции $g(x)$* на сегменте $[a, b]$, а величина $I_g(f)$ называется *интегралом Стильеса* от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ (или относительно функции $g(x)$) и обозначается

$$I_g(f) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

11.3. Условия существования интеграла Стильеса

Сформулируем и докажем некоторые условия существования интеграла Стильеса.

Теорема 1. Пусть функция $g(x)$ является функцией ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$. Тогда для существования интеграла Стильеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Сформулируем критерий Коши существования предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю: предел $\lim_{\Delta_V \rightarrow 0} \sigma_g(V) = I_g(f)$ существует тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух размеченных разбиений V_1 и V_2 сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих условию $\Delta_{V_1} < \delta$ и $\Delta_{V_2} < \delta$, справедливо неравенство:

$$|\sigma_g(V_1) - \sigma_g(V_2)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нём. Значит, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено: $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2V_a^b(g)}$ (если

$V_a^b(g) = 0$, то $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ и, очевидно, $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует и равен нулю). Возьмём произвольные разбиения V_1 и V_2 сегмента $[a, b]$, для которых выполняются условия $\Delta_{V_1} < \delta$ и $\Delta_{V_2} < \delta$. Пусть $T_1 = T(V_1)$ и $T_2 = T(V_2)$ – соответствующие им неразмеченные разбиения. Тогда разбиение $T = T_1 \cup T_2$ – измельчение разбиений T_1 и T_2 . Обозначим через V произвольное размеченное разбиение сегмента $[a, b]$, удовлетворяющее условию $T = T(V)$. Для него выполнено:

$$|\sigma_g(V_1) - \sigma_g(V)| = \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k g - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{j_k} f(x_j) \Delta_j g \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{j_k} (f(x_k) - f(x_j)) \Delta_j g \right| < \frac{\varepsilon}{2V_a^b(g)} V_a^b(g).$$

Аналогично доказывается, что

$$|\sigma_g(V_2) - \sigma_g(V)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $|\sigma_g(V_1) - \sigma_g(V_2)| < \varepsilon$, т.е. согласно критерию Коши существует $\lim_{\Delta_V \rightarrow 0} \sigma_g(V) = I_g(f)$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $g(x)$ является возрастающей. Отсюда сразу следует, что $\Delta_k g > 0$ для любого $k = 1, \dots, n$, что позволяет дословно повторять многие рассуждения, проводимые ранее для интеграла Римана.

Аналогично суммам Дарбу в случае обычного интеграла Римана для любого разбиения $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[a, b]$ определим *верхнюю и нижнюю суммы Дарбу–Стильеса*:

$$S_g(T) = \sum_{k=1}^n M_k (g(x_k) - g(x_{k-1})), \quad s_g(T) = \sum_{k=1}^n m_k (g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

где $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$.

Заметим, что в простейшем случае $g(x) = x + c$ мы получаем обычное определение сумм Дарбу.

Рассуждениями, полностью аналогичными соответствующим рассуждениям для обычных сумм Дарбу, можно доказать следующие свойства сумм Дарбу–Стильеса:

- 1) При измельчении разбиения верхняя сумма Дарбу–Стильеса может только уменьшиться; нижняя – только возрасти.
- 2) Для любых разбиений T_1 и T_2 сегмента $[a, b]$ выполнено:

$$s_g(T_1) \leq S_g(T_2).$$

Так же, как и в случае интеграла Римана, можно определить *верхний и нижний интегралы Дарбу–Стильеса*: $I_g^* = \inf_T S_g(T)$, $I_{*g} = \sup_T s_g(T)$,

где нижняя и верхняя грани берутся по всем неразмеченным разбиениям сегмента $[a, b]$. Как и в случае интеграла Римана, можно доказать, что верхний интеграл Дарбу–Стильеса является пределом верхних сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю; нижний – пределом нижних интегральных сумм.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$. Она является интегрируемой на этом сегменте по возрастающей функции $g(x)$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое неразмеченное разбиение T сегмента $[a, b]$, для которого

$$S_g(T) - s_g(T) < \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы является дословным повторением рассуждений, проводимых в случае интеграла Римана (см. теорему 2 пункта 1.2.5 §1).

Теорема 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ по Риману, а функция $g(x)$ удовлетворяет на этом сегменте условию Липшица, то интеграл $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функция $g(x)$ возрастает и удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует число $C > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполнено:

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ по Риману, то существует такое разбиение T сегмента $[a, b]$, для которого $S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{C}$, где $s(T)$ и $S(T)$ – соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f(x)$. Заметим теперь, что

$$S_g(T) - s_g(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta_k g \leq C \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon.$$

Согласно теореме 2 это означает, что функция $f(x)$ интегрируема по $g(x)$ на $[a, b]$.

Пусть теперь $g(x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Рассмотрим представление

$$g(x) = \varphi(x) - \psi(x), \text{ где } \varphi(x) = Cx + x, \psi(x) = Cx + x - g(x).$$

Заметим, что если $x_1 < x_2$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (C+1)(x_2 - x_1) > 0$, $\psi(x_2) - \psi(x_1) = C(x_2 - x_1) - (g(x_2) - g(x_1)) + x_2 - x_1 \geq x_2 - x_1 > 0$ в силу условия Липшица. Значит, для каждой из функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ теорема верна. Тогда она справедлива и для их разности – функции $g(x)$.

Пример 1. Показать, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ по Риману, а функция $g(x)$ допускает представление

$$g(x) = C + \int_a^x \varphi(t)dt, \text{ где функция } \varphi(t) \text{ также интегрируема по Риману на}$$

$$[a, b], \text{ то интеграл Стильбеса } \int_a^b f(x)dg(x) \text{ существует.}$$

Решение. Действительно, так как $\varphi(t)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она ограничена: $|\varphi(t)| \leq M$. Следовательно,

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt \right| \leq M|x_1 - x_2|$$

для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$. Значит, функция $g(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица и, согласно предыдущей теореме, функция $f(x)$ интегрируема по $g(x)$ на этом сегменте.

11.4. Свойства интеграла Стильбеса

1. Если функция $g(x)$ дифференцируема и её производная интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

где интеграл в правой части понимается как обычный интеграл Римана.

Доказательство. Заметим, что, так как функция $g'(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица на этом сегменте и интеграл в левой части равенства существует (см. пример 1 предыдущего пункта). Интеграл в правой части существует, поскольку произведение двух интегрируемых по Риману функций снова является функцией, интегрируемой по Риману (свойство 2 пункта 1.4 § 1).

Осталось доказать равенство левой и правой частей. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$, $\Delta_V < \delta$, выполнено:

$$\left| \sigma_g(V; f) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left| \sigma(V; fg') - \int_a^b f(x) g'(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(по определениям интегралов Стильеса и Римана соответственно). Пусть теперь $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – некоторое неразмеченное разбиение $[a, b]$, удовлетворяющее условию $\Delta_T < \delta$. Тогда по теореме Лагранжа

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Обозначим $V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$. Тогда получаем, что $\sigma_g(V; g) = \sigma(V; fg')$, т.е.

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) - \int_a^b f(x) g'(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

2. Интеграл Стильеса удовлетворяет свойству линейности как относительно интегрируемой функции $f(x)$, так и относительно интегрирующей функции $g(x)$, т.е. (при условии существования каждого из интегралов Стильеса в правой части)

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dg(x) &= \alpha \int_a^b f_1(x) dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x) dg(x), \\ \int_a^b f(x) d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) &= \alpha \int_a^b f(x) dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x) dg_2(x). \end{aligned}$$

Доказательство этих свойств вытекает из соотношений для интегральных сумм Дарбу–Стильеса:

$$\begin{aligned} \sigma_g(V; \alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha \sigma_g(V; f_1) + \beta \sigma_g(V; f_2) \\ \sigma_{\alpha g_1 + \beta g_2}(V; f) &= \alpha \sigma_{g_1}(V; f) + \beta \sigma_{g_2}(V; f) \end{aligned}$$

для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$.

$$\text{3. Если } a < c < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x) \text{ в}$$

предположении, что существуют все три интеграла.

Доказательство. Пусть V_1 – размеченное разбиение сегмента $[a, c]$, V_2 – разбиение сегмента $[c, b]$. Тогда $V = V_1 \cup V_2$ – размеченное разбиение сегмента $[a, b]$, причём $\Delta_V = \max\{\Delta_{V_1}, \Delta_{V_2}\}$ и $\sigma_g(V) = \sigma_g(V_1) + \sigma_g(V_2)$. Поскольку все три интеграла существуют, то из последнего соотношения предельным переходом получаем, что

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x).$$

Заметим, что из существования обоих интегралов

$$\int_a^c f(x) dg(x) \text{ и } \int_c^b f(x) dg(x)$$

не следует, вообще говоря, существование интеграла $\int_a^b f(x) dg(x)$.

Пример 1. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Доказать, что интегралы $\int_{-1}^0 f(x) dg(x)$ и $\int_0^1 f(x) dg(x)$ существуют и равны нулю.

Решение. Действительно, первый из интегралов равен нулю, поскольку функция $f(x)$ тождественно равна нулю на промежутке интегрирования. Второй интеграл равен нулю, поскольку интегрирующая функция $g(x)$ постоянна на сегменте $[0, 1]$, следовательно, $g(x_k) - g(x_{k-1}) = 0$ для любого выбора точек x_{k-1} и x_k .

Однако интеграл $\int_{-1}^1 f(x) dg(x)$ не существует. В самом деле, рассмотрим разбиение T сегмента $[-1, 1]$, не содержащее в качестве точки разбиения точку 0. Пусть V – произвольное размеченное разбиение, которому соответствует разбиение T . Тогда в интегральной сумме Стильеса $\sigma_g(V)$ останется лишь одно слагаемое, а именно, слагаемое

$$f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = f(\xi_k),$$

для которого точка нуль содержится в сегменте $[x_{k-1}, x_k]$. В зависимости от

того, будет ли точка ξ_k удовлетворять условию $\xi_k \leq 0$ или $\xi_k > 0$, мы получим, что $\sigma_g(V) = 0$ или $\sigma_g(V) = 1$. Это означает, что не существует предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

4. Если функции $f'(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$, то имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

где интеграл в правой части понимается как интеграл Римана.

Доказательство. Пусть $V = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ – произвольное размеченное разбиение сегмента $[a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_g(V) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} g(\xi_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) + f(\xi_n)g(x_n) - f(\xi_1)g(x_0) = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(b)(f(b) - f(\xi_n)) - g(a)(f(\xi_1) - f(a)) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} g(\xi_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sigma_g(V_1), \end{aligned}$$

где $V_1 = \{\xi_0; \xi_1; \dots; \xi_{n+1}; x_1; \dots; x_{n-1}\}$ (предполагается, что $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$). Так как, очевидно, $\Delta_{V_1} \leq 2\Delta_V \leq 4\Delta_{V_1}$, то существует

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_V \rightarrow 0} \sigma_g(V; f) &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \lim_{\Delta_{V_1} \rightarrow 0} \sigma_f(V_1; g) = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x). \end{aligned}$$

Отсюда и из свойства 1 вытекает необходимое утверждение.

5. Если функция $g(x)$ монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$, функции $f(x)$ и $h(x)$ интегрируемы по $g(x)$ на этом сегменте и $f(x) \geq h(x)$ для любого $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dg(x) \geq \int_a^b h(x)dg(x).$$

Доказательство этого неравенства вытекает из соотношения $\sigma_g(V; f - h) \geq 0$ для любого размеченного разбиения V сегмента $[a, b]$ и

из линейности интеграла Стильеса (свойство 2).

6. Для интеграла Стильеса справедлива следующая формула среднего значения: пусть функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, так что $m \leq f(x) \leq M$, а функция $g(x)$ монотонно возрастает на этом сегменте. Тогда найдётся такое число μ , $m \leq \mu \leq M$, что для интеграла Стильеса выполнено:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \mu(g(b) - g(a))$$

при условии существования интеграла в левой части последнего равенства. В частности, если дополнительно предположить непрерывность функции $f(x)$ на $[a, b]$, то можно утверждать, что найдётся такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Доказательство этого факта вполне аналогично доказательству формулы среднего значения для интеграла Римана (см. теорему 1 пункта 2.2.1 §2).

Пример 2. Пусть $\{x\}$ – дробная часть числа x , т.е. $\{x\} = x - [x]$, где $[x] = m \in \mathbb{Z}$ – целая часть числа x , $m \leq x < m+1$. Вычислить значение

$$\text{интеграла } \int_0^3 x d\{x\}.$$

$$\text{Решение. Имеем: } \int_0^3 x d\{x\} = \int_0^3 x dx + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Пример 3. Пусть } g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ \cos x, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases} \text{ Вычислить интеграл } \int_0^{2\pi} x dg(x).$$

Решение. Получим, что

$$\int_0^{2\pi} x dg(x) = \int_0^{\pi} x d \sin x + \int_{\pi}^{2\pi} x d \cos x + (-1) \cdot \pi = 2\pi - 2.$$

В заключение приведём (без доказательства) теорему об общем виде линейного функционала в пространстве $C[a, b]$.

Теорема 1. 1) Пусть функция $g(x)$ является функцией ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$. Тогда интеграл Стильеса

$$I_g(f) = \int_a^b f(x) dg(x)$$

является линейным функционалом в пространстве $C[a, b]$.

2) Пусть $\varphi(f)$ – произвольный линейный функционал в пространстве $C[a, b]$. Тогда существует такая функция ограниченной вариации $g(x)$ на сегменте $[a, b]$, что $\varphi(f)$ представляется в виде:

$$\varphi(f) = I_g(f) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Для более детального ознакомления с интегралом Стильеса и его свойствами рекомендуем обратиться к классическим изданиям [9, 18].

Контрольные задания и задачи для самостоятельного решения к § 11

1. Вычислите интеграл $\int_{-1}^2 f(x) d\theta(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 2]$, а $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.
2. Вычислите интеграл $\int_{-1}^1 x d|x|$.
3. Вычислите интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d(e^x \operatorname{sgn}(\sin x))$.
4. Вычислите интеграл $\int_0^{\pi} (x-1) d(\cos x \operatorname{sgn} x)$.
5. Пусть $g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < \pi/2, \\ 2, & \text{если } x = \pi/2 \text{ или } x = \pi, \\ x - \pi/2, & \text{если } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$ Найдите $\int_0^{\pi} \sin dg(x)$.
6. Постройте такие функции $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[0, 1]$, что функция $f(x)$ интегрируема по Стильесу по функции $g(x)$ на $[0, 1]$, но обе

функции $f(x)$ и $g(x)$ не являются ограниченными на этом сегменте.

7. Постройте три такие функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ на сегменте $[0, 1]$, что $g(x) = h(x)$ при $x \neq \frac{1}{2}$, и при этом функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$ на $[0, 1]$, но не интегрируема по $h(x)$ на этом сегменте.

8. Приведите пример функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ на сегменте $[0, 1]$ таких, что функция $f(x)$ непрерывна на этом сегменте; функции $g(x)$ и $h(x)$ имеют на нём ограниченное изменение, причём $g(x) = h(x)$ при $x \neq 1$, но

$$\int_0^1 f(x) dg(x) \neq \int_0^1 f(x) dh(x).$$

9. Приведите пример функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ таких, что функция $f(x)$ непрерывна на этом сегменте; функция $g(x)$ имеет на нём ограниченное изменение, но функция $f_0(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ f(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ не интегрируема на сегменте $[-1, 1]$ по функции $g(x)$.

10. Пусть $D(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное}, \\ 1, & x - \text{рациональное} \end{cases}$ – функция Дирихле на сегменте $[0, 1]$, а функция $g(x)$ не является тождественно постоянной на этом сегменте. Докажите, что интеграл $\int_0^1 D(x) dg(x)$ не существует.

11. Пусть функция $g(x)$ является функцией ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$, а функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на этом сегменте по функции $g(x)$. Докажите, что

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| V_a^b(g).$$

12. Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – две неубывающие функции на сегменте $[a, b]$, а функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте по функции $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$. Докажите, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ по каждой из функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1.

1. *Решение.* а) Данная функция, являясь непрерывной на сегменте $[1, 2]$, интегрируема на нём, поэтому для предложенного разбиения этого сегмента на равные n промежутков предел интегральных сумм при $n \rightarrow +\infty$ будет равен значению определённого интеграла $\int_0^1 x dx$. Из условия определяем,

что длина каждого из сегментов разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, $f(\xi_k) = f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n}$.

Составим интегральную сумму

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = 1 + \frac{1+n}{2n}, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(T, \xi) = 3/2;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sigma(T, \xi) &= \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} \left(2^{\frac{k}{n}} - 2^{\frac{k-1}{n}}\right) = \sum_{k=1}^n 2^{\frac{2k-1}{n}} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}}} \cdot \sum_{k=1}^n \left(4^{\frac{1}{n}}\right)^k = \\ &= \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{4^{\frac{1}{n}}(4 - 1)}{4^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{3 \cdot 4^{\frac{1}{n}}}{\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left(2^{\frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{3 \cdot 4^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}} + 1\right)}; \end{aligned}$$

тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(T, \xi) = 3/2$.

2. *Решение.* 1) Согласно критерию интегрируемости, ограниченная функция $f(x) = 1 + x$ интегрируема на сегменте $[-1, 4]$ тогда и только тогда, когда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение этого сегмента, при котором

$$S(T) - s(T) < \varepsilon. \quad (1)$$

Разобьём сегмент $[-1, 4]$ на n равных частей точками $x_k = -1 + \frac{5k}{n}$,

$k = 0, 1, \dots, n$, тогда $\Delta x_k = \frac{5}{n}$. На каждом сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ непрерывная и

возрастающая функция $1 + x$ достигает точной нижней грани на левом конце сегмента, а точной верхней – на правом. Поэтому

$$s(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(-1 + \frac{5(k-1)}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1),$$

$$S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f\left(-1 + \frac{5k}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k.$$

Отсюда $S(T) - s(T) = \frac{25}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (k-1)\right) = \frac{25}{n} < \varepsilon$, если $n > \frac{25}{\varepsilon}$, т.е.

при таком числе точек разбиения выполнено условие (1). Значит, данная функция интегрируема на $[-1, 4]$.

2) Для вычисления интеграла воспользуемся выбранным выше разбиением сегмента $[-1, 4]$ на n равных частей, в качестве точек ξ_k возьмём правые концы частичных сегментов: $\xi_k = x_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда получаем интегральную сумму вида $\frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k$, откуда окончательно находим

$$I = \int_{-1}^4 (1+x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{25}{2}.$$

3. *Решение.* Заметим, что, так как подынтегральные функции в этих примерах непрерывны на сегментах интегрирования, то данные интегралы существуют. Вычислим их.

а) $\int_0^1 e^x dx$. Разобьём промежуток интегрирования на n равных частей

точками $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, выбирая $\xi_k = x_k$ (т.е. правые концы сегментов разбиения), $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=1}^n e^{\xi_k} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e - 1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(T, \xi) = e - 1.$$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$. Разобьём сегмент $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на n равных частей точками

$x_k = \frac{\pi k}{2n}$, где $\Delta x_k = \frac{\pi}{2n}$, взяв в качестве точек ξ_k правые концы частичных сегментов: $\xi_k = x_k$, $k = 1, \dots, n$. Составим интегральную сумму

$$S(T) = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right).$$

Вычислим $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$. Для этого умножим и разделим каждое слагаемое в сумме на $\sin \frac{\pi}{4n}$ и затем воспользуемся формулой преобразования произведения синусов в разность косинусов:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) &= \frac{1}{\sin(\pi/4n)} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{\pi k}{2n} \cdot \sin \frac{\pi}{4n} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin(\pi/4n)} \left(\cos \frac{\pi}{4n} - \cos \frac{3\pi}{4n} + \cos \frac{3\pi}{4n} - \cos \frac{5\pi}{4n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} - \cos \frac{(2n+1)\pi}{4n} \right) \end{aligned}$$

Здесь все слагаемые в последних скобках, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются.

Замечание. Можно было воспользоваться известным тригонометрическим тождеством

$$\sum_{k=1}^n \sin(k\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

где $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, в котором следовало положить $\alpha = \frac{\pi}{2n}$.

Итак, получили, что

$$S(T) = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi(n+1)}{4n} \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4n}\right).$$

Так как, в силу первого замечательного предела, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = 1$ и, кроме

того, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(T) = 1$.

в) $\int_{-1}^2 x^2 dx$. Разобьём сегмент $[-1, 2]$ на n равных частей и выберем

значения аргумента ξ_k в правых концах отрезков разбиения. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(-1 + \frac{3k}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{n} - \frac{18k}{n^2} + \frac{27k^2}{n^3}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{18}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = 3 - 9 + 9 = 3. \end{aligned}$$

г) $\int_1^3 x^3 dx$. Указание: разбейте сегмент интегрирования на n частичных

отрезков точками $x_k = 3^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n$, выбирая $\xi_k = x_k$, $k = 1, \dots, n$.

д) $\int_a^b \frac{dx}{x}$. Выберем следующее разбиение сегмента $[a, b]$: пусть

$x_k = a \cdot (b/a)^{\frac{k}{n}}$ (тогда $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$); $\xi_k = x_k$, $k = 1, \dots, n$. Получим, что

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] \text{ и}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(a/b\right)^{\frac{k}{n}} (b/a)^{\frac{k-1}{n}} \left((b/a)^{\frac{1}{n}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n(a/b)^{\frac{1}{n}} \left((b/a)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b/a)^{\frac{1}{n}} - 1}{-1/n} = \ln \frac{b}{a}$$

(мы воспользовались следствием из второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a).$$

е) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$. Выполним разбиение сегмента интегрирования на n равных

частей точками $x_k = 1 + \frac{k}{n}$, где $\Delta x_k = \frac{1}{n}$, а в качестве точек ξ_k возьмём $\sqrt{x_{k-1}x_k}$, $k = 1, \dots, n$. Составим интегральную сумму

$$\begin{aligned} S(T) &= \sum_{k=1}^n f\left(\sqrt{\left(1 + \frac{k-1}{n}\right)\left(1 + \frac{k}{n}\right)}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k-1)(n+k)} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right) = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}$.

4. *Решение.* а) В силу возрастания функции $f(x) = x^3$ и её непрерывности на $[-2, 3]$, при любом разбиении $T = \{-2 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 3\}$ этого сегмента $f(x)$ достигает на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ своих наименьшего и наибольшего значений, соответственно, на его левом и правом концах. По условию, $\Delta x_k = \frac{5}{n}$ ($k = 1, \dots, n$), $x_k = -2 + \frac{5k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Таким образом, для нижней и верхней сумм Дарбу получаем

$$s(T) = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(-2 + \frac{5(k-1)}{n} \right)^3 \frac{5}{n} = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-2 + \frac{5i}{n} \right)^3,$$

и

$$S(T) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(-2 + \frac{5k}{n} \right)^3 \frac{5}{n} = \frac{5}{n} \sum_{k=1}^n \left(-2 + \frac{5k}{n} \right)^3.$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание тождества

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

(доказываются методом математической индукции), находим:

$$s(T) = 16\frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \quad S(T) = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

б) Аналогично предыдущему примеру, получаем

$$s(T) = \frac{10230}{n(2^{10/n} - 1)}, \quad S(T) = \frac{10230 \cdot 2^{10/n}}{n(2^{10/n} - 1)}.$$

5. *Ответ:* функция должна быть непрерывной.

$$6. \text{ *Ответ:* например, } f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x-1, & 0 < x \leq 1; \end{cases} \quad \text{при условии, что}$$

точка $x = 0$ входит в число точек, разбивающих $[-1, 1]$ на частичные сегменты.

7. *Решение.* Пусть $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a, b]$. При произвольном разбиении сегмента $[a, b]$ точками x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) имеем:

$$s(T) = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \right) \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^n m \Delta x_k = m(b-a)$$

и

$$S(T) = \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M \Delta x_k = M(b-a),$$

что и означает ограниченность множества нижних сумм Дарбу функции f константой $m(b-a)$ снизу и множества верхних сумм Дарбу этой функции константой $M(b-a)$ сверху. Отсюда в силу соотношения $s(T) \leq S(T)$ вытекает ограниченность рассматриваемых множеств.

8. *Указание:* воспользуйтесь свойством точной верхней и точной нижней граней функции f , заданной на сегменте $[a, b]$: $\sup_{x \in [a, b]} f(x) \geq \sup_{x \in [c, d]} f(x)$ и

$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \inf_{x \in [c, d]} f(x)$, если $[c, d] \subseteq [a, b]$, и определением нижней и верхней сумм Дарбу функции f . Подробнее см. доказательство леммы 3

пункта 1.2.4.

9. *Доказательство.* При решении данной задачи можно воспользоваться результатом предыдущей задачи. Так как функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого фиксированного разбиения T сегмента $[a, b]$ верно неравенство $|\sigma(T, \xi) - I| < \varepsilon$, где $I = \int_a^b f(x) dx$. Так как, кроме того, для любого T верно, что

$$s(T) = \inf_{\xi_i} \sigma(T, \xi) \text{ и } S(T) = \sup_{\xi_i} \sigma(T, \xi),$$

то существуют хотя бы одна интегральная сумма σ_1 и хотя бы одна интегральная сумма σ_2 такие, что $\sigma_1 - s(T) < \varepsilon$ и $S(T) - \sigma_2 < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} |S(T) - s(T)| &= |S(T) - \sigma_2 + \sigma_2 - I + I - \sigma_1 + \sigma_1 - s(T)| \leq \\ &\leq |S(T) - \sigma_2| + |\sigma_2 - I| + |I - \sigma_1| + |\sigma_1 - s(T)| < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\lim_{\Delta_T \rightarrow 0} |S(T) - s(T)| = 0$.

10. *Ответ:* интегральные суммы могут принимать значения $2, 3/2, 1, 1/2, 0$; $s(T) = 0$; $S(T) = 2$.

11. *Ответ:* при шаге меньшем $\varepsilon/(f(b) - f(a))$ для возрастающей функции, и меньшем $\varepsilon/(f(a) - f(b))$ для убывающей функции.

12. *Ответы:* а) $f(x) = \arcsin x$ при $a \leq x \leq b$, где $-1 \leq a < b \leq 1$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ при $a \leq x \leq b$, где $a < 0, b > 0$. Эта ограниченная на $[a, b]$ кусочно-непрерывная функция имеет на указанном сегменте единственную точку разрыва при $x = 0$, в которой она определена (при этом односторонние пределы существуют, конечны, но не равны).

В качестве другого примера рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, заданную на интервале $(0, 1)$. Будет ли эта функция интегрируемой по Риману на сегменте $[0, 1]$? Строго говоря, интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ не существует, так как в

точке $x = 0$ функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена. Однако интеграл $\int_0^1 f(x) dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ C, & \text{если } x = 0 \end{cases} \quad (C - \text{произвольное число}), \text{ существует и}$$

не зависит от выбора C . Поэтому считают, что интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ также существует и равен $\int_0^1 f(x) dx$.

В качестве ещё одного из примеров приведём функцию $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Покажем, что эта функция интегрируема в собственном смысле (по Риману) на сегменте $[0, 1]$. В самом деле, функция ограничена ($|f(x)| \leq 1$) и терпит разрывы 1-го рода в точках $x = 0$ и $x_n = \frac{1}{n}$ ($n \in N$). Покажем, что множество точек разрыва функции имеет меру нуль по Жордану. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\exists n_0 \in N$: при $n > n_0$ $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Каждую из оставшихся точек $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots, n_0$, покроем интервалом длины $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Тогда сумма длин таких интервалов равна $\sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, всё множество точек разрыва функции оказалось покрытым конечной системой $n_0 + 1$ интервалов, общая сумма длин которых меньше ε .

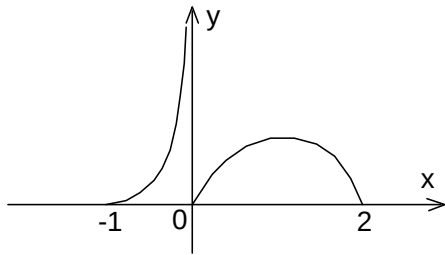
в) Функция $f(x) = x|x - 3| + 4x$ монотонно возрастает на сегменте $2 \leq x \leq 4$ (покажите это самостоятельно) и поэтому интегрируема на нём. Функция $f(x) = [x]$ всюду определена и не убывает, поэтому будет интегрируема на любом сегменте.

г) Покажем, что функция $f(x) = \sin x$ удовлетворяет условию Липшица на любом сегменте $[a, b]$. Действительно, для произвольных точек

$x_1, x_2 \in [a, b]$ имеем: $|\sin x_1 - \sin x_2| = 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| = |x_1 - x_2|$, что и доказывает выполнение условия Липшица (константа Липшица $C = 1$).

д) Рассмотрим сложную функцию $\sin(\arctg x)$ на произвольном сегменте $[a, b]$; здесь $f(x) = \arctg x$ интегрируема на $[a, b]$, а функция $\phi(y) = \sin y$ удовлетворяет на сегменте $[\arctga, \arctgb]$ условию Липшица (см. предыдущий пример). Поэтому данная сложная функция интегрируема по Риману на $[a, b]$.

13.



Ответ: например, функция $f(x)$, заданная графиком, изображённым на рисунке, не интегрируема (объясните, почему).

14. Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ ограничена на $[0, 1]$ и имеет разрывы в точках $x_0 = 0$ и $x_k = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда на интервале $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ лежат точки $x_0, x_k, k > \frac{4}{\varepsilon}$, а на сегменте $\left[\frac{\varepsilon}{4}, 1\right]$ – конечное число точек разрыва: $x_1, \dots, x_p$, где $p \leq \frac{4}{\varepsilon}$, $p+1 > \frac{4}{\varepsilon}$. Каждую из точек $x_i, i = 1, \dots, p$, покроем интервалом $\left(x_i - \frac{\varepsilon}{4p}, x_i + \frac{\varepsilon}{4p}\right)$. Таким образом, все точки разрыва функции $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$ можно покрыть конечным числом интервалов, сумма длин

которых равна $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Это означает (теорема 2 пункта 1.3.2), что $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.

15. Доказательство. 1-й способ. Так как $\int_0^1 f(x) dx$ есть предел интегральных сумм $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$, то возможны два случая: а) точка $x = 1/2$ попадает в число точек ξ_k , и тогда $\sigma(T, \xi) = \Delta x_k$ при некотором k ; б) точка $x = 1/2$ не попадает в число точек ξ_k , и тогда $\sigma(T, \xi) = 0$. В

любом случае $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma(T, \xi) = 0$.

2-й способ. При любом разбиении сегмента $[0, 1]$ точками x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) имеем: $s(T) = 0$ и $S(T) = 1 \cdot \Delta x_k$, где k такое, что $\frac{1}{2} \in [x_{k-1}, x_k]$. Следовательно, $S(T) - s(T) = \Delta x_k \rightarrow 0$ при $\Delta_T \rightarrow 0$, что означает интегрируемость f .

Равенство же $\int_0^1 f(x) dx = 0$ вытекает из условия $s(T) = 0$.

16. Указание. Интегрируемость f доказывается по аналогии с предыдущей задачей. Соотношение $\int_a^b f(x) dx = 0$ вытекает из того, что при любом разбиении $[a, b]$ на частичные сегменты существуют интегральные суммы, равные нулю.

17. Доказательство. Заметим, что эта функция ограничена и разрывна в каждой рациональной точке сегмента. Таким образом, теорема 2 (п. 1.3.2.) к ней неприменима (рациональные точки сегмента $[0, 1]$ нельзя покрыть никакой конечной системой интервалов с суммой длин, меньшей 1). Построим для функции Римана такое разбиение сегмента $[0, 1]$, что разность между верхней и нижней суммами Дарбу этого разбиения будет меньше наперёд заданного числа $\varepsilon > 0$. Обозначим $N = [2/\varepsilon] + 1$ (квадратные скобки здесь означают целую часть числа; таким образом, N – натуральное число). Выберем в

качестве δ любое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2N^2}$ (заметим, что выбор числа δ зависит только от ε). Пусть $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[0, 1]$, $\Delta_T < \delta$. Рассмотрим те сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения T , для которых $M_k - m_k > \frac{1}{N}$. Ясно, что каждый такой сегмент должен содержать хотя бы одну рациональную точку со знаменателем, меньшим числа N . Таким образом, количество этих отрезков не превосходит N^2 . Тогда

$$S(T) - s(T) = \sum^* (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum^{**} (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

Здесь первое слагаемое соответствует тем сегментам разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, для которых $M_k - m_k \leq \frac{1}{N}$, второе – тем, для которых $M_k - m_k > \frac{1}{N}$.

Тогда $S(T) - s(T) \leq \sum^* \frac{1}{N} \Delta x_k + \sum^{**} (1 - 0) \Delta x_k \leq \frac{1}{N} \cdot 1 + N^2 \cdot \delta$ (здесь мы воспользовались тем, что точная верхняя грань функции Римана на сегменте $[0, 1]$ равна 1, нижняя – 0; а также тем, что сумма длин части отрезков разбиения не превосходит суммы длин всех отрезков разбиения, т.е. длины $[0, 1]$). В силу выбора чисел N и δ получаем, что

$$S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{2} + N^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2N^2} = \varepsilon,$$

т.е. функция Римана является интегрируемой на сегменте $[0, 1]$.

18. Доказательство. 1-й способ. Так как данная функция имеет на сегменте $[-1, 1]$ единственную точку разрыва $x = 0$, то она интегрируема на этом сегменте (теорема 2, п.1.3.2).

2-й способ. Функция $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ интегрируема на сегменте $[-1, 1]$. Функция $\psi(y) = \ln y$ непрерывна на сегменте $[1, 3]$. Значит, сложная функция $\psi(\varphi(x))$ интегрируема на $[-1, 1]$ (см. теорему 6 пункта 1.3.5).

19. Доказательство. В самом деле, на любом сколь угодно малом сегменте разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ найдутся как рациональная, так и иррациональная точки. Если на всех сегментах выбрать рациональные ξ_k , то интегральная сумма $\sigma(T, \xi) = b - a$; если же все ξ_k иррациональны, то $\sigma(T, \xi) = 0$. Так как предел интегральных сумм оказался зависящим от выбора промежуточ-

ных точек, то он не существует ($\lim_{\Delta \rightarrow 0} S(T) = b - a \neq 0 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s(T)$ – не выполняется критерий интегрируемости). Значит, функция Дирихле не интегрируема.

20. Доказательство. Выполним разбиение сегмента $[0, 1]$ так, чтобы одна из точек $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} < \dots < x_n = 1$ разбиения сегмента на частичные сегменты совпала с числом λ . Пусть, ради определённости, $x_m = \lambda$ ($0 \leq m \leq n$). Для всех k , $k \leq m$, выберем рациональные $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, а для $k > m$ выберем иррациональные ξ_k , и запишем соответствующую интегральную сумму $\sigma(T, \xi)$:

$$\sigma(T, \xi) = 1 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + \dots + 1 \cdot \Delta x_m + 0 \cdot \Delta x_{m+1} + \dots + 0 \cdot \Delta x_n = \lambda.$$

Тогда $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma(T, \xi) = \lambda$.

21. Решение. Воспользуемся тем, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \int_0^1 \sin(50x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \text{ и}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sin(50\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

где $m_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \sin(50x)$, $M_k = \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \sin(50x)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что для этого ε можно указать такое δ , что неравенство $\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon$ выполняется, как только $\Delta_T < \delta$.

Заметим, что $m_k = \sin(50a_k)$, $M_k = \sin(50b_k)$, где $a_k, b_k \in [x_k, x_{k+1}]$, поэтому по теореме Лагранжа

$$M_k - m_k = 50 \cos(50c_k)(b_k - a_k), \quad c_k \in (a_k, b_k),$$

откуда имеем

$$0 \leq M_k - m_k \leq 50(b_k - a_k) \leq 50\Delta x_k.$$

Просуммируем

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq 50 \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

При условии $\Delta x_k < \delta$ получим

$$50 \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 < 50\delta \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = 150\delta.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < 150\delta.$$

Достаточно взять $\delta = \varepsilon/150$.

22. Указание: воспользуйтесь схемой решения предыдущей задачи.
 23. См. доказательство теоремы 1 пункта 1.3.1.
 24. См. доказательство теоремы 2 пункта 1.3.2.
 25. См. доказательство теоремы 4 пункта 1.3.4.
 26. См. доказательство теоремы 5 пункта 1.3.5.
 27. См. в теореме 2 пункта 1.2.1.
 28. Ответ: вообще говоря, неверно. Например, функция Дирихле, как известно, ограничена на любом сегменте, но нигде не интегрируема.
 29. Ответ: да (см. следствие к теореме 2 из пункта 1.2.1).
 30. См. свойство 3 пункта 1.4.
 31. См. доказательство свойства 4 (аддитивности) в пункте 1.4. В случае произвольного расположения точек утверждение доказывается аналогично.
 32. См. доказательство свойства 1.1 пункта 1.4.
 33. См. доказательство свойства 1.2 пункта 1.4.
 34. См. доказательство в замечании 1 к пункту 1.4.
 35. См. доказательство в замечании 2 к пункту 1.4.
 36. См. доказательство свойства 2 пункта 1.4.
 37. Ответ: а) Рассмотрите функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}; \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}, \end{cases} \quad x \in [a, b];$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{рационально}; \\ 1, & \text{если } x - \text{иррационально}, \end{cases} \quad x \in [a, b].$$

б) Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}; \\ -1, & \text{если } x - \text{иррационально}, \end{cases} \quad x \in [a, b].$$

38. См. замечание 3 в пункте 1.4.
 39. См. замечание 4 в пункте 1.4.
 40. См. теорему 6 пункта 1.3.5.
 41. Ответ: вообще говоря, неверно (см. замечание 2 в пункте 1.3.5).
 42. Доказательство. Пусть сначала функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Рассмотрим функцию $f(x) - g(x)$. Она равна нулю всюду на

$[a, b]$, за исключением множества жордановой меры нуль, следовательно, интегрируема на этом сегменте (см. теорему 2 пункта 1.3.2). Значит, и функция $g(x)$ является интегрируемой на $[a, b]$ (как разность двух интегрируемых функций). Покажем теперь, что в этом случае $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Пусть $M = \max \left\{ \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)| \right\}$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как множество тех точек, в которых подынтегральная функция отлична от нуля, имеет жорданову меру нуль, то мы можем построить систему интервалов, покрывающих эти точки, с общей суммой длин, не превосходящей ε/M . Концы этих интервалов образуют некоторое разбиение сегмента $[a, b]$. Составим интегральную сумму, соответствующую этому разбиению. Так как на той части сегмента $[a, b]$, которая не вошла в построенные интервалы, подынтегральная функция тождественно равна нулю, то очевидно, что эта интегральная сумма по модулю не будет превосходить ε .

Поскольку функция $f(x) - g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то для неё должен существовать предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю. Однако мы показали, что интегральные суммы могут принимать сколь угодно малые значения. Значит, этот предел равен нулю, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

В частности, доказанное утверждение означает, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то, не изменяя свойства интегрируемости и самого значения интеграла функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, её значения на множестве жордановой меры нуль можно заменить произвольными конечными значениями.

Если же функция $f(x)$ не является интегрируемой на $[a, b]$, то и функция $g(x)$ не может быть интегрируемой (иначе $f(x)$ была бы интегрируема как сумма двух интегрируемых функций $f(x) - g(x)$ и $g(x)$).

43. *Доказательство.* Докажем сначала, что из равенства $\int_a^b f^2(x)dx = 0$

следует, что $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$. Пусть существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) = \alpha \neq 0$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое,

что $f^2(x) \geq \frac{\alpha^2}{2}$ для любой точки $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (свойство локального сохранения знака функцией, непрерывной в точке). Введём вспомогательную функцию $g(x) = \begin{cases} \alpha^2/2, & x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0, & x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{cases}$. Очевидно, что

$f(x) \geq g(x)$ для любой точки $x \in [a, b]$. Значит,

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = 2\delta \cdot \frac{\alpha^2}{2} > 0$$

(см. свойства интегралов, связанные с неравенствами, в параграфе 2). Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Докажем обратное. Пусть функция $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$. Тогда, согласно критерию Лебега интегрируемости функции (теорема 3 пункта 1.3.3), множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ все точки разрыва функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ можно покрыть счётной системой интервалов с общей суммой длин, не превосходящей ε (см. определение множества лебеговой меры нуль в пункте 1.3.3). Пусть $M = \sup_{a \leq x \leq b} f^2(x)$ (так как

$f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте). Построим систему I интервалов, покрывающих все точки разрыва функции $f(x)$ на $[a, b]$, с общей суммой длин, не превосходящих ε/M . Пусть J – система интервалов, покрывающая все точки сегмента $[a, b]$, не вошедшие в I . Тогда система $I \cup J$ образует открытое покрытие $[a, b]$. Выделим из неё конечное подпокрытие $I' \cup J'$ (это можно сделать согласно лемме о конечном покрытии⁵) и составим соответствующую интегральную сумму

⁵ См., например, [19], глава II, §5.

$$\sigma(f^2; I' \cup J') = \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset I'} f^2(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset J'} f^2(\xi_k) \Delta x_k.$$

Так как, по построению,

$$\left| \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset I'} f^2(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq M \frac{\varepsilon}{M}, \quad \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset J'} f^2(\xi_k) \Delta x_k \equiv 0,$$

то получили, что $\sigma(f^2; I' \cup J') < \varepsilon$. Значит, $\int_a^b f^2(x)dx = 0$.

44. *Доказательство.* Так как колебание функции $f(x)$ на сегменте разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ равно $\omega_k = \sup_{x_{k-1} \leq x', x'' \leq x_k} |f(x') - f(x'')|$, то, в силу неравенства $\|f(x') - f(x'')\| \leq |f(x') - f(x'')|$, $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$, получаем аналогичное соотношение для точных верхних граней

$$\sup_{x_{k-1} \leq x', x'' \leq x_k} \|f(x') - f(x'')\| \leq \sup_{x_{k-1} \leq x', x'' \leq x_k} |f(x') - f(x'')|.$$

В силу выполнения критерия интегрируемости для функции $f(x)$ на $[a, b]$, из последнего неравенства следует, что он выполнен и для функции $\|f(x)\|$.

45. *Доказательство.* Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально;} \\ -1, & \text{если } x - \text{иррационально,} \end{cases} \quad x \in [a, b].$$

Тогда $|f(x)| \equiv 1$ на $[a, b]$. Очевидно, что интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ существует. С другой стороны, сама функция $f(x)$ не интегрируема на $[a, b]$. Покажем это. Пусть $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ – произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Тогда для любого натурального числа k , $1 \leq k \leq n$, найдётся рациональное число $\xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и иррациональное число $\xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Значит,

$$S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a,$$

$$s(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (-1) \cdot \Delta x_k = -(b - a),$$

т.е. $S(T) - s(T) = 2(b - a)$ для любого разбиения T сегмента $[a, b]$. Это означает, что данная функция не интегрируема на этом сегменте (критерий Римана интегрируемости функции).

46. Доказательство. Пусть сначала $f(x)$ непрерывна на сегменте $[A, B]$, $[a, b] \subset (A, B)$. Тогда она равномерно непрерывна на $[A, B]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что $|f(x + h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$

для всех $x, x + h \in [A, B]$, если $|h| < \delta$. Тогда

$$\int_a^b |f(x + h) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon$$

(так как если $f(x) \in R[a, b]$, $g(x) \in R[a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ для любой точки $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$). Для непрерывных функций свойство интегральной непрерывности доказано.

Докажем теперь следующий вспомогательный факт: если функция $f(x)$ интегрируема на сегмент $[a, b]$, то существует последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций $\varphi_n(x)$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = 0$.

Действительно, так как функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента

$[a, b]$, что $I \leq S(T) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, где $I = \int_a^b f(x) dx$,

$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$. Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} M_k, & x_{k-1} \leq x < x_k \\ M_n, & x = b \end{cases}$. Тогда оче-

видно, что функция $\varphi_\varepsilon(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) dx = S(T)$.

Легко видеть также, что функция $\varphi_\varepsilon(x)$ разрывна в точках $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ сегмента $[a, b]$ и $m \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq M$, где $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Рассмотрим сегменты $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, где $\delta = \min \left\{ \frac{\Delta_T}{4}, \frac{\varepsilon}{2(n-1)(|M| + |m|)} \right\}$.

Они не пересекаются. Пусть функция

$$\varphi_{\varepsilon, \delta}(x) = \begin{cases} M_1, & a \leq x \leq x_1 - \delta \\ M_k, & x_k - \delta \leq x \leq x_{k+1} - \delta, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \\ M_n, & x_{n-1} \leq x \leq b \end{cases}$$

и линейна на сегментах $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда $\varphi_{\varepsilon, \delta}(x)$ определена однозначно (так как её значения в концах сегментов определены), непрерывна на $[a, b]$ и

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f(x) - \varphi_{\varepsilon, \delta}(x)) dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi_\varepsilon(x)) dx \right| + \left| \int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon, \delta}(x)) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^b f(x) dx - S(T) \right| + \\ &+ \left| \int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon, \delta}(x)) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (n-1)(|M| + |m|)\delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Вернёмся теперь к исходной задаче. Пусть $f(x)$ – произвольная интегрируемая на сегменте $[A, B]$ функция, $[a, b] \subset (A, B)$. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно доказанному выше утверждению, найдётся непрерывная на $[A, B]$ функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\left| \int_A^B (f(x) - \varphi(x)) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{Тогда, тем более,}$$

$$\left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \int_a^b (f(x + h) - \varphi(x + h)) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

если h достаточно мало). Так как для непрерывных функций свойство интегральной непрерывности уже доказано, то можно утверждать, что существует положительное число δ такое, что для любого действительного h , $|h| < \delta$,

$$\text{выполняется: } \left| \int_a^b (f(x + h) - f(x)) dx \right| \leq \left| \int_a^b (f(x + h) - \varphi(x + h)) dx \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b (\varphi(x+h) - \varphi(x)) dx \right| + \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Утверждение доказано полностью.

47. Доказательство. Пусть для определённости $f(x)$ не возрастает на

$[0, 1]$. Так как $\int_{(k-1)/n}^{k/n} dx = \frac{1}{n}$ для любого натурального k , то, разбивая инте-

грал $\int_0^1 f(x) dx$ на сумму интегралов по отрезкам длины $\frac{1}{n}$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались тем, что функция $f(x)$ не возрастает на отрезке

$[0, 1]$, следовательно, $0 \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$ для любого

$k, 1 \leq k \leq n$). Значит,

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{f(0) - f(1)}{n},$$

что и требовалось доказать.

48. Доказательство. Преобразуем разность

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) dx.$$

По теореме Лагранжа имеем:

$$|f(x) - f(\xi_k)| = |f'(\eta_k)| |x - \xi_k| \leq |x - \xi_k| \quad (\eta_k \in (x, \xi_k)).$$

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - \xi_k| dx =$$

(используя геометрический смысл интеграла)

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{(x_k - \xi_k)^2}{2} + \frac{(x_{k-1} - \xi_k)^2}{2} \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \xi_k)^2 + 2(x_k - \xi_k)(\xi_k - x_{k-1}) + (\xi_k - x_{k-1})^2}{2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} \leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Неулучшаемость оценки следует из рассмотрения в качестве $f(x)$ функции x и равномерного разбиения $[a, b]$ с шагом $1/(b-a)$.

49. Решение. а) Рассмотрим выражение $\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n} \right)$ как интегральную сумму $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} \right)$ для функции $f(x) = x$, соответствующую разбиению T сегмента $[0, 1]$ на n равных частей и выбору $\xi_k = \frac{k}{n}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(T, \xi) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Аналогично получаем: б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + k/n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$;

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + (k/n)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi};$$

$$\text{д) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1);$$

$$\text{е) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

$$\text{ж) } S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), \text{ откуда}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

3) $S_n = \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)}$. Так как при $n \rightarrow +\infty$ имеем

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ то, подставляя, получим}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)} = \left(\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)} = \\ &= \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\left| o\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)} \right| \leq \left| o\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2-1} \right| = \left| o\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ и,

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)} = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos(\pi k/n)} = \int_0^\pi \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}.$$

Так как первообразной функцией для функции $\frac{1}{1 + 0,5 \cos x}$ на сегменте $[0, \pi]$ является функция

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\tg(x/2)}{\sqrt{3}}, & \text{если } 0 \leq x < \pi; \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & \text{если } x = \pi; \end{cases}$$

(см. пример 3 пункта 3.2 параграфа 3), то

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} = \frac{1}{2} (F(\pi) - F(0)) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{и) } S_n &= \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right) \left(x + \frac{k+1}{n}\right)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right)^2 + \left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}. \text{ Так как } \left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = o\left(\left(x + \frac{k}{n}\right)^2\right), \end{aligned}$$

то $\sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right)^2 + \left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}} \sim x + \frac{k}{n}$. Тогда имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2}.$$

к) Перепишем сумму в виде

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{1 + 1/(kn)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{kn \cdot 2^{\frac{k}{n}}}{1 + kn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(1+kn) \cdot 2^{\frac{k}{n}} - 2^{\frac{k}{n}}}{1 + kn} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{1 + kn} = S'_n - S''_n. \text{ Оценим } S''_n: \text{ в силу неравенств } \\ 2^{\frac{k}{n}} \leq 2 \text{ и } \frac{1}{1 + kn} \leq \frac{1}{1 + n} \text{ имеем: } 0 < S''_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + n} = \frac{2}{n(1+n)} \cdot n < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n = 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}.$$

50. Доказательство. Заметим, что выражение $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ есть

верхняя сумма Дарбу S_n функции $f(x) = \frac{1}{x}$, отвечающая разбиению сегмента $[1, n+1]$ на n равных частичных сегментов, а $\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x}$. Следова-

тельно, $x_n = S_n - \int_1^n \frac{dx}{x} > 0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Рассмотрим разность

$$x_n - x_{n+1} = (S_n - S_{n+1}) + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = -\frac{1}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

Так как $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$ при $x \in [n, n+1]$, то $x_n - x_{n+1} > 0$, т.е. $\{x_n\}$ – убывающая последовательность. Её ограниченность сверху (например, первым членом) очевидна.

51. Решение. Покажем, что $\{U_n\}$ – убывающая и ограниченная снизу последовательность: $0 \leq U_n \leq 2 \int_0^1 x^n dx = \frac{2}{n+1}$, поэтому $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

52. Доказательство. Так как f – интегрируема на $[a, b]$, то она, а вместе с ней и $|f|$, ограничены на $[a, b]$. Пусть $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f|$. Рассмотрим приращение функции $F(x)$, $x \in [a, b]$, отвечающее приращению Δx :

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Следовательно, $|\Delta F(x)| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \right| \leq M \cdot |\Delta x|$. Если в определении непрерывности для заданного произвольного $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta = \varepsilon / M$, то как только $|\Delta x| < \delta$, то $|\Delta F(x)| < \varepsilon$, что и доказывает непрерывность $F(x)$.

53. См. доказательство теоремы 4 пункта 1.5.

54. Решение. Интегрируемость функции по Риману на некотором отрезке и существование у неё первообразной на этом отрезке, вообще говоря, не эквивалентны друг другу. Существуют функции, интегрируемые на отрезке, но не имеющие на нём первообразной, и наоборот, функции, имеющие первообразную, но не интегрируемые по Риману. Приведём соответствующие примеры.

1) Рассмотрим функцию $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$. Она дифференцируема в каждой точке сегмента $[0, 1]$. Вычислим её производную:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}. \text{ Тогда очевидно, что}$$

функция $f(x)$ имеет на сегменте $[0, 1]$ первообразную (функцию $F(x)$), но она не интегрируема по Риману на $[0, 1]$, так как не ограничена на этом сегменте.

2) Рассмотрим функцию Римана

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное} \\ 1/n, & x = m/n - \text{рациональное} \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Она интегрируема на сегменте $[0, 1]$ (см. задачу 17), но не имеет на этом сегменте первообразной. Докажем последнее утверждение. Пусть существует функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = R(x) \quad \forall x \in [0, 1]$. Тогда функция $R(x)$ должна принимать все промежуточные значения между своим наибольшим и наименьшим значениями на сегменте $[0, 1]$, т.е. между 0 и 1 (теорема Дарбу⁶). Однако $R(x)$ принимает только значения вида $\frac{1}{n}$, где n – натуральное число. Значит, функция Римана не может являться производной никакой функции $F(x)$, т.е. не имеет первообразной.

55. Решение. По свойству аддитивности определённого интеграла,

$$\int_c^d f(t) dt = \int_a^d f(t) dt - \int_a^c f(t) dt = F(d) - F(c).$$

56. Доказательство. Используя теорему о среднем значении (теорема 1 пункта 2.2 параграфа 2), имеем

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = \frac{1}{\Delta x} (\mu \Delta x) = \mu,$$

где

$$m = \inf_{x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x} f \leq \mu \leq \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x} f = M. \quad (1)$$

В силу непрерывности f в точке x_0 , $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$: как только $|\Delta x| < \delta$, то $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, $t \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. То есть

⁶ Теорема о том, что производная функции на некотором сегменте принимает все свои промежуточные значения (между значениями в концах сегмента), даже не являясь непрерывной функцией. Доказательство этого факта можно найти, например, в [1], глава V, §6.

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon,$$

но тогда и

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m \leq M \leq f(x_0) + \varepsilon, \quad (2)$$

В силу (1) и (2) получаем, что $|\mu - f(x_0)| \leq \varepsilon$, откуда следует, что функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0 , причём

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu = f(x_0).$$

См. также доказательство теоремы 2 пункта 1.5.

57. Доказательство. а) результат следует из задачи 56;

$$\text{б) } \left| \frac{\Delta F}{\Delta x} \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| |\Delta x| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

58. Указание: воспользуйтесь результатом задачи 56. См. также следствие из теоремы 2 пункт 1.5.

59. Доказательство. $|F(x_1) - F(x_2)| =$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(t) dt - \int_a^{x_2} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right| \leq M |x_1 - x_2|.$$

60. Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\text{а) } F'(x) = \cos(\sqrt{x}^2) \cdot (\sqrt{x})' = \cos x \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{б) } F'(x) = \ln(x^5) \cdot (x^5)' = 25x^4 \ln x;$$

$$\text{в) } F'(x) = -\frac{2 \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{x}$$

$$(\text{так как } \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{2 \sin t}{t} dt = - \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2 \sin t}{t} dt);$$

$$\text{г) Так как, например, } \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt = \int_1^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt - \int_1^{\frac{1}{x}} \cos(t^2) dt, \text{ то}$$

$$F'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos(1/x^2)}{x^2}.$$

61. Решение. Дифференцирование всех указанных интегралов может быть выполнено по формуле Лейбница:

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t, x) dt = f(\psi(x), x) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x), x) \cdot \varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(t, x) dt.$$

а) Поскольку интеграл $\int_a^b \sin(x^2) dx$ есть константа, не зависящая от x , то

его производная по x равна 0; б) $\sin(b^2)$; в) $-\sin(a^2)$; г) $2x\sqrt{1+x^4}$; д)

$$2x\sqrt{1+x^4}; \text{ е) } \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}; \text{ ж) } \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}; \text{ з) } \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}};$$

$$\text{и) } \frac{3t^2}{\sqrt{1+t^{12}}}; \text{ к) } 0; \text{ л) } - \int_{t^2}^{x^3} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+t^4)^3}} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+x^{12}}};$$

$$\text{м) } -\sin x \cos(\pi \cos^2 x) - \cos x \cos(\pi \sin^2 x) = (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x)$$

62. Решение. а) В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Инте-

грал с переменным верхним пределом $\int_0^x \cos(t^2) dt$ есть первообразная не-

прерывной функции $\cos(x^2)$, т.е. $\left(\int_0^x \cos(t^2) dt \right)' = \cos(x^2)$. Поэтому, при-

меняя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1.$$

Отметим, что первообразная для $\cos(x^2)$ не является элементарной функцией, т.е. $\int_0^x \cos(t^2) dt$ не выражается через элементарные функции. Это,

однако, не помешало вычислению искомого предела.

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctgx)^2}{x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\frac{d}{dx} \int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{d}{dx} e^{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0. \end{aligned}$$

63. Решение. а) Заметим, что при $x \rightarrow +\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к $+\infty$. Следовательно, данный предел представляет собой неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределённость, воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

б) Перепишем предел в виде $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt}{x^{-\alpha}}$. Очевидно, что при $x \rightarrow +0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞ . Следовательно, данный предел представляет собой неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right)'}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{\alpha} = \frac{f(0)}{\alpha}$$

(в силу непрерывности $f(x)$ в точке $x = 0$ справа).

в) Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, для её раскрытия применим правило

Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tgt} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{tgt} dt \right)'}{\left(\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x \sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\frac{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}}{\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}} = 1. \end{aligned}$$

64. Доказательство. Доопределим f в точке x_0 предельным значением до непрерывной, полагая $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Тогда $F'(x_0) = f(x_0)$ (см. задачу 56).

65. Доказательство. Если $\Delta x > 0$, то

$$\frac{\Delta F_+(0)}{\Delta x} = \frac{F(0 + \Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} 1 \cdot dt = 1.$$

Следовательно, $F'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_+(0)}{\Delta x} = 1$. Если же $\Delta x < 0$, то

$$\frac{\Delta F_-(0)}{\Delta x} = \frac{F(0 + \Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} (-1) \cdot dt = -1,$$

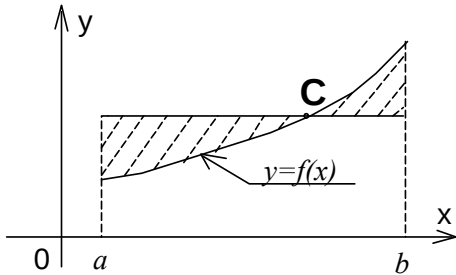
следовательно, $F'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_-(0)}{\Delta x} = -1$. Очевидно, $F'_+(0) \neq F'_-(0)$.

66. Указание: используйте схему решения предыдущей задачи и теорему о среднем значении⁷ ($\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$, где $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$).

67. Решение. Пусть c – абсцисса точки C . Вычислим сумму площадей заштрихованных фигур:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c (f(c) - f(x))dx + \int_c^b (f(x) - f(c))dx = \\ &= f(c)(c-a) - \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - f(c)(b-c) = \\ &= 2cf(c) - f(c)(a+b) - \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Исследуем S как функцию c на экстремум. Так как $S'(c) = 2cf'(c) + 2f(c) - f'(c)(a+b) - f(c) - f(c) = (2c-a-b)f'(c)$,



то $S'(c)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $c = (a+b)/2$. Следовательно, при этом значении c рассматриваемая площадь будет наименьшей.

Ответ: надо выбрать точку C с абсциссой $(a+b)/2$.

68. Доказательство. Для доказательства эквивалентности двух бесконечно больших функций достаточно показать, что предел их отношения при $x \rightarrow +\infty$ равен 1. При вычислении предела дважды воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2x \int_0^x e^{t^2} dt\right)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \left(\int_0^x e^{t^2} dt + xe^{x^2}\right)}{2xe^{x^2}} =$$

⁷ Теоремы о среднем значении рассмотрены ниже в §2, посвящённом оценкам интегралов

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{xe^{x^2}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{xe^{x^2}} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)'}{(xe^{x^2})'} + 1 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2x^2} + 1 = 1. \end{aligned}$$

69. Доказательство. Покажем, что для дифференцируемой функции $\varphi(x)$ на $[0, +\infty)$ выполнены необходимые и достаточные условия возрастания ($\varphi'(x) \geq 0$ при $x > 0$, и $\varphi'(x)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком сегменте, принадлежащем промежутку $[0, +\infty)$). Находим

$$\varphi'(x) = \frac{x f(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x t f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}.$$

В силу того, что $\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} > 0$ (по условию задачи), достаточно показать,

что функция $\psi(x) = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$ неотрицательна. Очевидно,

$\psi(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt \geq 0$, поскольку $f(t) > 0$, а $t \leq x$. Таким образом,

$\varphi'(x) \geq 0$ при $x > 0$, следовательно, $\varphi(x)$ возрастает на $[0, +\infty)$.

70. Ответ: $\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = f(1) \approx 1.66$, $\min_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0.11$.

71. Ответ: $y_{\min} = y(1) = -\frac{17}{12}$, точки перегиба:

$$M_1\left(2; -\frac{4}{3}\right), M_2\left(\frac{4}{3}; -\frac{112}{81}\right).$$

72. Указание: найдите производную функции

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt.$$

73. Решение. Обозначим $A = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $A = |f(x_0)|$. При $p > 0$ имеем

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 A^p dx \right)^{1/p} = A.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ так, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется

$|f(x)| \geq A - \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $0 \leq \alpha \leq x_0 \leq \beta \leq 1$ и $0 < |\alpha - \beta| < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\geq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left(\int_\alpha^\beta \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) (\beta - \alpha)^{1/p} \geq A - \varepsilon \end{aligned}$$

при достаточно больших p (поскольку $(\alpha - \beta)^{1/p} \rightarrow 1$ при $p \rightarrow +\infty$). Таким образом, искомый предел равен A .

74. Решение. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи. При любом $x \in (0, 2)$ по теореме Лагранжа для отрезков $[0, x]$ и $[x, 2]$ имеем: $f(x) = f(0) + f'(\vartheta_1)x$ и $f(x) = f(2) + f'(\vartheta_2)(2 - x)$, где $\vartheta_1 \in (0, x)$, $\vartheta_2 \in (x, 2)$, т.е. $f(x) = 1 + f'(\vartheta_1)x$ и $f(x) = 1 + f'(\vartheta_2)(2 - x)$, откуда, соответственно, получаем оценки $f(x) \geq 1 - x$ и $f(x) \geq x - 1$. Тогда

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_1^2 f(x) dx \geq \int_1^2 (x - 1) dx = \frac{1}{2},$$

причём равенства не могут достигаться одновременно, поскольку тогда $f(x) \equiv 1 - x$ при $x \in [0, 1]$ и $f(x) \equiv x - 1$ при $x \in [1, 2]$, и нарушается условие непрерывной дифференцируемости $f(x)$. Поэтому

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > 1,$$

что противоречит последнему условию в задаче. Таким образом, не существует функция $f(x)$, удовлетворяющая поставленным условиям.

75. Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то интеграл $\int_0^x f(t) dt$ является дифференцируемой функцией и $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) = f(x)$. В

силу уравнения $f(x) = \int_0^x f(t) dt$ получаем, что $f'(x) = f(x)$ для любого

x . Покажем, что решением дифференциального уравнения $f'(x) = f(x)$ могут являться только функции вида $f(x) = Ce^x$, где C – некоторая постоянная. Действительно, пусть функция $f(x)$ удовлетворяет данному уравнению. Тогда $(f(x)e^{-x})' = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} \equiv 0$. Значит, $f(x)e^{-x} = C$, т.е. $f(x) = Ce^x$.

Вернёмся к исходной задаче. Подставим функцию $f(x) = Ce^x$ в уравнение $f(x) = \int_0^x f(t) dt$, получим: $Ce^x = \int_0^x Ce^t dt = C(e^x - 1)$. Из последнего соотношения вытекает, что $C = 0$, т.е. $f(x) \equiv 0$.

§2.

1. Решение. а) По определению, $M[\cos x] = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = -\frac{2}{3\pi}$. Отметим, что непрерывная функция $\cos x$ принимает на сегменте $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ значение $-\frac{2}{3\pi}$, а именно $\cos \xi = -\frac{2}{3\pi}$, в точке $\xi = \arccos\left(-\frac{2}{3\pi}\right) \in [0, 3\pi/2]$. б) Имеем для среднего значения: $M[\operatorname{sgn} x] = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = \frac{1}{3}$. В данном случае разрывная функция $\operatorname{sgn} x$ не принимает на сегменте $[-1, 2]$

значение $\frac{1}{3}$ ни в какой точке. в) $M[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$, при этом

среднее значение достигается при $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [0,1]$. г) $M[\sin x \sin(x + \varphi)] =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \sin(x + \varphi) dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \cos(2x + \varphi)) dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi dx - \int_0^{2\pi} \cos(2x + \varphi) dx \right) = \frac{\cos \varphi}{2}; \text{ д) } 2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}.$$

2. Ответ: при $a = e$.

3. Решение. Скорость V свободно падающего тела в момент времени t (отсчёт ведётся от момента начала падения) выражается формулой

$$V(t) = V_0 + gt,$$

где V_0 – начальная скорость, g – ускорение свободного падения (единицы измерения считаем согласованными). Вычислим среднее значение скорости за промежуток времени T :

$$M[V] = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (V_0 + gt) dt = \frac{1}{T} \left(V_0 t + \frac{gt^2}{2} \right) \Big|_0^T =$$

$$= V_0 + \frac{gT}{2} = \frac{V_0 + V(T)}{2}.$$

Как видим, оно оказалось равным среднему арифметическому начальной скорости V_0 и скорости тела в момент времени T .

4. См. свойство 3 среднего значения функции в пункте 2.2.1.

В случае $f(x) = \arctg x$ получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \arctg t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}.$$

5. См. свойство 4 среднего значения функции в пункте 2.2.1.

6. См. свойство 5 среднего значения функции в пункте 2.2.1.

7. Доказательство. Для доказательства первого утверждения см. свойство 1 пункта 2.1.

Покажем, что для строго положительной функции выполняется неравенство $\int_a^b f(x) dx > 0$. Действительно, так как функция $f(x)$ интегрируема на

$[a, b]$, то множество её точек разрыва не может совпадать со всем отрезком в силу критерия Лебега интегрируемости функции (см. теорему 3 пункта 1.3.3 параграфа 1). Значит, существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x)$ непре-

рывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$. Отсюда следует, что $\int_a^b f(x) dx > 0$ (см. свойство 3 пункта 2.1).

8. Ответ: вообще говоря, нет. Например, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 1 > 0$, но при

этом, очевидно, неравенство $\cos x \geq 0$ не выполняется при $\pi/2 < x \leq \pi$.

9. См. свойство 2 пункта 2.1 и задачу 7.

10. Ответ: вообще говоря, нет. Рассмотрите пример: $f(x) = \sin x$, $g(x) \equiv 1/2$, $x \in [0, \pi]$.

11. См. свойство 3 пункта 2.1.

12. См. свойство 7 пункта 2.1.

13. Указание: воспользоваться методом от противного.

14. Указание: воспользоваться методом от противного (см. свойство 4 пункта 2.1).

15. См. свойство 5 пункта 2.1. Можно также применить следующее свойство модулей в отношении интегральных сумм:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k.$$

16. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

17. См. свойство 6 пункта 2.1.

18. См. свойство 8 пункта 2.1.

19. См. свойство 9 пункта 2.1.

20. Доказательство. Воспользуемся геометрическим смыслом опреде-

лённого интеграла. Интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x}$ выражает площадь криволинейной трапе-

ции, ограниченной линиями $y = 1/x$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$; числа же

$\frac{b-a}{a}$ и $\frac{b-a}{b}$ равны площадям прямоугольников с основанием $[a, b]$ и

высотами, равными $1/a$ и $1/b$ соответственно. Один из них содержит криво-

линейную трапецию, а другой содержится в ней. Заметим, что при $a = b$ выполнено $\frac{b-a}{b} = \ln \frac{b}{a} = \frac{b-a}{a}$.

21. Доказательство. Положим $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ и покажем, что

$A_n^n \geq a_1 a_2 \dots a_n$. Будем считать (без ограничения общности), что $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Пусть число k таково, что $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq A_n \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_n$. Так как

$$\frac{A_n - a_1}{A_n} + \frac{A_n - a_2}{A_n} + \dots + \frac{A_n - a_k}{A_n} \leq \ln \frac{A_n}{a_1} + \ln \frac{A_n}{a_2} + \dots + \ln \frac{A_n}{a_k}$$

(см. предыдущую задачу), то

$$\frac{kA_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{A_n} \leq \ln \frac{(A_n)^k}{a_1 a_2 \dots a_k}.$$

Кроме того,

$$\ln \frac{a_{k+1}}{A_n} + \ln \frac{a_{k+2}}{A_n} + \dots + \ln \frac{a_n}{A_n} \leq \frac{a_{k+1} - A_n}{A_n} + \frac{a_{k+2} - A_n}{A_n} + \dots + \frac{a_n - A_n}{A_n}$$

(снова по предыдущей задаче), откуда следует

$$\ln \frac{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n}{(A_n)^{n-k}} \leq \frac{(a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n) - (n-k)A_n}{A_n}.$$

Но

$$\frac{kA_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{A_n} = \frac{(a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n) - (n-k)A_n}{A_n}.$$

Значит,

$$\ln \frac{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n}{(A_n)^{n-k}} \leq \ln \frac{(A_n)^k}{a_1 a_2 \dots a_k}.$$

Отсюда, в силу монотонности функции $f(x) = \ln x$, можно утверждать, что

$$\frac{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_n}{(A_n)^{n-k}} \leq \frac{(A_n)^k}{a_1 a_2 \dots a_k},$$

откуда вытекает требуемое неравенство.

22. Решение. а) Так как при $x \in [1/2, 1]$ (т.е. на всём промежутке интегрирования, за исключением единственной точки $x = 1$, подынтегральная

функция $x^2 \ln x$ отрицательна, то и интеграл от неё принимает отрицательное значение. Иначе: воспользуемся 1-й теоремой о среднем: так как функции x^2 и $\ln x$ собственно интегрируемы на сегменте $[1/2, 1]$, причём функция $\ln x$ не меняет знака при $1/2 < x < 1$, а x^2 — непрерывна на $[1/2, 1]$, то найдётся число $\xi \in (1/2, 1)$ такое, что

$$\int_{1/2}^1 x^2 \ln x dx = \xi^2 \int_{1/2}^1 \ln x dx = \xi^2 (x \ln x - 1) \Big|_{1/2}^1 = \frac{\xi^2}{2} (\ln 2 - 1) < 0;$$

б) Доопределим функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, например, её предельным

значением до непрерывной на $[0, 2\pi]$, т.е. рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 2\pi] \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Сделаем во втором интеграле замену $t = x - \pi$:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi} dt = - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi} dt = - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} dx. \quad \text{Подставляя,}$$

имеем: $\int_0^{\pi} f(x) dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{x+\pi} dx$. Применим к полученному

интегралу 1-ю теорему о среднем:

$$\pi \int_0^{\pi} \frac{f(x)}{x+\pi} dx = \pi f(\xi) \int_0^{\pi} \frac{dx}{x+\pi} = \pi f(\xi) (\ln(x+\pi)) \Big|_0^{\pi} = \pi f(\xi) (\ln 2\pi - \ln \pi) =$$

$$\pi f(\xi) \ln 2 > 0, \text{ так как } f(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} > 0 \text{ при } \xi \in (0, \pi).$$

в) По свойству аддитивности представим интеграл $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$ в виде

суммы двух интегралов по сегментам $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$, и сделаем во втором интеграле подстановку $t = x - \pi$ (чтобы пределы интегрирования у обоих интегралов стали одинаковыми):

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x \sin x dx +$$

$$\int_0^{\pi} (\pi + t) \sin(\pi + t) dt = \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_0^{\pi} (\pi + t) \sin t dt = -\pi \int_0^{\pi} \sin t dt.$$

Применяя 1-ю теорему о среднем, получим: $-\pi \int_0^{\pi} \sin t dt = -\pi^2 \sin \xi < 0$,

так как $\sin \xi > 0$ при $\xi \in (0, \pi)$.

г) Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int_{-2}^2 x^3 2^x dx = \int_{-2}^0 x^3 2^x dx + \int_0^2 x^3 2^x dx.$$

Сделаем в первом из интегралов замену $t = -x$:

$$\int_{-2}^2 x^3 2^x dx = -\int_2^0 t^3 2^{-t} dt + \int_0^2 x^3 2^x dx = \int_0^2 x^3 (2^x - 2^{-x}) dx.$$

Применяя первую теорему о среднем, получим:

$$\int_0^2 x^3 (2^x - 2^{-x}) dx = 2f(\xi) > 0,$$

так как $f(\xi) = \xi^3 (2^{\xi} - 2^{-\xi}) > 0$ при $\xi \in (0, 2)$.

23. Доказательство. а) Так как $\inf_{k \leq x \leq k+1} \frac{1}{x} = \frac{1}{k+1}$, $\sup_{k \leq x \leq k+1} \frac{1}{x} = \frac{1}{k}$, то

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{k}.$$

б) Указание: просуммируйте неравенства $\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$, $k \in N$, по

k от 1 до $n-1$ и воспользуйтесь свойством аддитивности определённого интеграла.

$$\text{в) } \frac{\pi}{128} = \frac{1}{32} \cdot \frac{\pi}{4} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{4}.$$

Строгие соотношения следуют из того, что $\sqrt{2}/2 < \sin x < 1$ при $x \in (\pi/4, \pi/2)$.

г) Неравенство вытекает из оценки $2 < 2^{x^2} < 16$ при $x \in (1, 2)$.

д) Так как $2 < \ln x + 2 < 3$ при $x \in (1, e)$, то $\frac{e-1}{3} < \int_1^e \frac{dx}{\ln x + 2} < \frac{e-1}{2}$.

е) Указание: при оценке подынтегральной функции на сегменте $[2, 3]$ воспользуйтесь её монотонностью на этом сегменте.

ж) Указание: используя логарифмическое дифференцирование, покажите,

что $\sup_{0 \leq x \leq 1} x^x = 1$, $\inf_{0 \leq x \leq 1} x^x = e^{-\frac{1}{e}}$. Оценка $e^{-\frac{1}{e}} \leq x \leq 1$ влечёт необходимое соотношение.

з) Указание: воспользуйтесь оценкой $3\sqrt{11}/2 \leq \sqrt{25 - x + x^2} \leq 5$, которая вытекает из того, что квадратный трёхчлен $x^2 - x + 25 = (x - (1/2))^2 + 99/4$ своё наибольшее на сегменте $[0, 1]$ значение, равное 5, принимает в точках 0 и 1, а наименьшее, равное $3\sqrt{11}/2$ – в точке $1/2$.

и) Указание: воспользуйтесь неравенствами

$$4 - 2x^2 \leq 4 - x^2 - x^3 \leq 4 - x^2 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

24. Доказательство. Воспользуемся неравенством $\sin t \leq t \leq t \operatorname{tg} t$, $t \in [0, \pi/2)$, проинтегрировав его в пределах от 0 до x , $x \in [0, \pi/2)$:

$$\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt \leq \int_0^x t \operatorname{tg} t dt \Leftrightarrow -\cos t \Big|_0^x \leq \frac{t^2}{2} \Big|_0^x \leq -\ln |\cos t| \Big|_0^x.$$

25. Доказательство.

$$\text{а) } \sin 1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos x dx \leq \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx \leq \int_{-1}^1 \cos x dx = 2 \sin 1;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3 + \sin x}} \geq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3 + \sqrt{3}/2}} \geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Знаки можно заменить на строгие (обоснуйте, почему).

26. Указание: а) учтите, что $e^{-x} < e^{-x^2}$ при $x \in [0, 1]$; в) функция e^{-x^2} на сегменте $[0, \pi]$ принимает не меньшие значения, чем на сегменте $[\pi, 2\pi]$;

г) $\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ при $x \in [0, \pi]$; ж) построив графики функции $y = \arctg x$ на соответствующих сегментах интегрирования, воспользуйтесь геометрическим смыслом определённого интеграла.

27. Решение. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$. б) Ука-

зание: воспользуйтесь оценкой $x^2 e^{-x^2} \leq x^2$, $x \in [0, 1]$. в) Указание: воспользуйтесь оценкой $\ln(1+x) \leq \ln 2$, $x \in [0, 1]$. г) Указание: воспользуйтесь оценкой: $\frac{\cos x}{1+x^2+x^3} \leq \frac{1}{1+x^2}$ и неравенством $\arctg x < x$, $x \in (0, +\infty)$.

28. Доказательство. Если $f(x) = 0$ при некоторых значениях $x \in [0, 1]$, то, доопределяя в них функцию $1/\sqrt{f}$, например, значением нуля, будем иметь:

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \geq \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{a^{2/3}}} dx \geq a^{2/3}.$$

29. Решение. $\int_{-a}^a e^{100x} dx = 0,01(e^{100a} - e^{-100a})$. Поэтому $\int_{-a}^a e^{100x} dx > 0,04$
 $\Leftrightarrow (e^{100a} - e^{-100a}) > 4$. Обозначив $e^{100a} = t > 0$, имеем $\frac{t^2 - 4t - 1}{t} > 0$ и $t > 2 + \sqrt{5}$. Отсюда $a > 0,01 \cdot \ln(2 + \sqrt{5})$.

30. Решение. а) Так как на сегменте $[0, 2\pi]$ график функции $y = \cos x$ симметричен относительно прямой $x = \pi$ ($\cos(2\pi - x) = \cos x$), то $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x} = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x}$. По первой теореме о среднем получаем, что $2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x} = \frac{2\pi}{1+0,5 \cos \xi}$, где $0 < \xi < \pi$. Далее, поскольку $-1 < \cos \xi < 1$, то $0,5 < 1+0,5 \cos \xi < 1,5$, и отсюда находим искомую оценку для интеграла:

$$\frac{4\pi}{3} < \frac{2\pi}{1+0,5 \cos \xi} < 4\pi.$$

Этот же результат можно записать в ином виде: так как $\frac{4\pi - 4\pi/3}{2} = \frac{4\pi}{3}$ и $\frac{4\pi + 4\pi/3}{2} = \frac{8\pi}{3}$, то $-\frac{4\pi}{3} < I - \frac{8\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$. Обозначим $\frac{I - 8\pi/3}{4\pi/3} = g$, тогда $I = \frac{8\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}g$, где $|g| < 1$.

б) Заметим, что для получения более точной оценки интеграла обычно рекомендуется (при наличии альтернативы) во время использования 1-й теоремы о среднем выносить из-под знака интеграла промежуточное значение той из двух функций, которая на сегменте интегрирования меняется более плавно по сравнению с другой. Например, в данном интеграле $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$

обе функции x^9 и $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ непрерывны и сохраняют знак на промежутке интегрирования, но при этом функция $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ меняется с меньшей скоростью, чем функция x^9 , поэтому вынесем её значение в некоторой точке $\xi \in (0, 1)$:

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \int_0^1 x^9 dx.$$

Подынтегральное выражение при этом существенно упростилось, и интеграл легко вычисляется: $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \frac{x^{10}}{10} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \cdot \frac{1}{10}$. Поскольку $0 < \xi < 1$, то $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} < 1$, т.е. $\frac{1}{10\sqrt{2}} < I < \frac{1}{10}$.

31. Доказательство. Для решения этой задачи нет необходимости вычислять интеграл под знаком предела. Достаточно оценить зависимость его значения от параметра n . Воспользуемся для этого 1-й теоремой о среднем:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{(1+\xi)(n+1)}, \text{ где } 0 < \xi < 1.$$

$$\text{Поэтому } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+\xi)(n+1)} = 0.$$

32. *Решение.* а) Согласно первой теореме о среднем,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\varepsilon x^3} = \frac{1}{1+\varepsilon \xi^3}, \text{ где } 0 < \xi < 1.$$

Поэтому $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+\varepsilon x^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1+\varepsilon \xi^3} = 1.$

б) $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x} = f(\xi) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dx}{x} = f(\xi) \ln \frac{b}{a},$ где $a\varepsilon < \xi < b\varepsilon.$ При

$\varepsilon \rightarrow +0$ величина $\xi \rightarrow 0$, а функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, поэтому $f(\xi) \rightarrow f(0)$, и окончательно имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x} = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

33. *Решение.* а) Так как обе функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x}$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, и $g(x)$ – монотонно убывает ($g'(x) < 0$) и неотрицательна, то по 2-й теореме о среднем имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx = g(a+0) \int_a^\xi f(x) dx = \frac{e^{-\alpha a}}{a} \int_a^\xi \sin x dx = \\ &= \frac{e^{-\alpha a}}{a} (-\cos x) \Big|_a^\xi = \frac{e^{-\alpha a}}{a} (\cos a - \cos \xi), \text{ где } a < \xi < b. \end{aligned}$$

Так как $-2 \leq \cos a - \cos \xi \leq 2$, то

$$-2 \frac{e^{-\alpha a}}{a} \leq \frac{e^{-\alpha a}}{a} (\cos a - \cos \xi) \leq 2 \frac{e^{-\alpha a}}{a}.$$

Далее, так как $\alpha \geq 0$, то $e^{-\alpha a} \leq 1$ и отсюда получаем более приближённую оценку: $-\frac{2}{a} < I < \frac{2}{a}$. Этот же результат, обозначив $\frac{I}{2/a} = \mathcal{G}$, можно пред-

ставить в следующем виде: $I = \frac{2}{a} \mathcal{G}$, где $|\mathcal{G}| < 1$.

б) Положим $x^2 = t$, тогда $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и $I = \int_a^b \sin(x^2) dx = \int_a^{b^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$

Функция $\frac{1}{\sqrt{t}}$ убывает и положительна на промежутке интегрирования, поэтому, применяя 2-ю теорему о среднем, имеем:

$$\int_a^{b^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2a} \int_a^\xi \sin t dt = \frac{\cos a^2 - \cos \xi}{2a}.$$

Отсюда получаем оценку

$$-\frac{1}{a} < I = \frac{\cos a^2 - \cos \xi}{2a} < \frac{1}{a},$$

или, обозначая $\mathcal{G} = aI$, $-1 < aI < 1$. Итак, $I = \frac{\mathcal{G}}{a}$, где $|\mathcal{G}| < 1$.

34. *Доказательство.* Функция $g(x) = \frac{1}{x}$ положительна и монотонно убывает на сегменте $[n, n+p]$, а функция $f(x) = \sin x$ – непрерывна на нём. По 2-й теореме о среднем

$$I = \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{n} \int_n^\xi \sin x dx = \frac{1}{n} (-\cos x) \Big|_n^\xi = \frac{1}{n} (\cos n - \cos \xi),$$

где $n < \xi < n+p$. Поскольку $\left| \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \frac{|\cos n - \cos \xi|}{n} \leq \frac{2}{n}$ при лю-

бом n , то $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0$.

35. *Решение.* $\int_0^x t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. По условию, $\frac{x^{n+1}}{n+1} = x(\mathcal{G}x)^n$,

отсюда $\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

36. *Доказательство.* Пусть $\alpha \in [a, b]$. Выберем числа $\varepsilon_k > 0$ ($k \in N$) такие, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и $\alpha + \varepsilon_k < b$. Тогда, по условию,

$\left| \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon_k} f(x) dx \right| \leq M \cdot \varepsilon_k^{1+\delta}$, и по теореме о среднем $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon_k} f(x) dx = \varepsilon_k f(\xi_k)$, где $\xi_k \in (\alpha, \alpha + \varepsilon_k)$. Отсюда $|f(\xi_k)| \leq M \varepsilon_k^{\delta}$ и, следовательно, $|f(\xi_k)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. В силу непрерывности $f(x)$ и того, что $\xi_k \rightarrow \alpha$, получаем $f(\alpha) = 0$. Поскольку α произвольно, то $f(x) \equiv 0$ на (α, β) . Очевидно, что тогда $f(x) \equiv 0$ и на $[a, b]$.

37. См. теорему 1 п. 2.3.1.

38. *Доказательство.* Применяя неравенство Коши–Буняковского для функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = e^x$, интегрируемых на сегменте $[0, 1]$, имеем:

$$\left(\int_0^1 \sqrt{x} e^x dx \right)^2 \leq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{4} (e+1)(e-1) < e-1,$$

откуда и получаем требуемый результат.

39. *Указание:* для оценки сверху воспользуйтесь неравенством Коши–Буняковского.

§ 3.

1. *Ответ:* а) 2; б) $\frac{5}{8}$; в) 2; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi^3}{2}$.

2. *Решение.* а) 1) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 x dx =$
 $= \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$

2) Очевидно, одной из первообразных к подынтегральной функции на сегменте $[-1, 1]$ является непрерывная функция

$$F(x) = \begin{cases} x^3/3, & x < 0; \\ x^2/2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}.$$

б) 2,5.

3. *Решение.* а) Пользуясь свойством аддитивности, разбиваем интеграл на сумму двух интегралов и затем по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{(2-x)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

б) Поступая аналогично, находим

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^t x dx + \frac{t}{1-t} \int_t^1 (1-x) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^t - \frac{t}{1-t} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \Big|_t^1 = \frac{t^2}{2} + \frac{t(1-t)}{2} = \frac{t}{2}.$$

4. *Решение.* а) Подынтегральная функция не определена и, более того, не ограничена в окрестности точки $x = 1$ (следовательно, не интегрируема по Риману); с другой стороны, функция $-\frac{1}{x-1}$, терпящая разрыв в точке $x = 1$, не является первообразной для подынтегральной функции на сегменте $[0, 2]$; б) допущено неравносильное преобразование: $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$, $x \in [0, \pi]$; в) не учтено, что $\sqrt{x^{2/3}} = |x^{1/3}|$, $x \in [-1, 1]$.

5. *Решение.* Монотонная на сегменте $[0, 2]$ непрерывная функция e^x принимает все промежуточные значения между 1 и e^2 ($7 < e^2 < 8$). Найдём точки разрыва подынтегральной функции: $e^{x_k} = k$, т.е. $x_k = \ln k$, где $k = 2, 3, \dots, 7$. На каждом промежутке вида $[\ln k, \ln(k+1))$, $k = 1, 2, \dots, 6$, имеем $[e^x] = \ln k$, поэтому

$$\int_0^2 [e^x] dx = \sum_{k=1}^6 \int_{\ln k}^{\ln(k+1)} k dx + \int_{\ln 7}^2 7 dx = \sum_{k=1}^6 k \ln \frac{k+1}{k} + 7(2 - \ln 7) =$$

$$= \sum_{k=1}^6 \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^k + 7(2 - \ln 7) =$$

$$= \ln \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^6 + 14 - \ln 7^7 =$$

$$= \ln \frac{7^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \ln 7^7 + 14 = 14 - \ln(7!).$$

6. Решение. а) Интегрируя, получаем

$$\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & |x| \leq l; \\ l, & x > l; \\ -l, & x < -l \end{cases} = \frac{1}{2}(|x+l| - |x-l|).$$

б) Поскольку $\operatorname{sgn}(x - x^3) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ -1, & 1 < x \leq 3; \\ 0, & x = 0, x = 1, \end{cases}$

то $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = 1 - 2 = -1.$

в) Точки разрыва подынтегральной функции $x_k = k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) разбивают сегмент интегрирования $[0, 6]$ на части, внутри каждой из которых целая часть $[x]$ раскрывается однозначно ($[x] = k$ при $x \in [k, k+1)$; при интегрировании на отрезке $[k, k+1]$ подынтегральную функцию на правом конце – в точке $x = k+1$ – доопределяем по непрерывности). Используя свойство аддитивности, в итоге получаем

$$\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx = \sum_{k=1}^5 k \int_k^{k+1} \sin \frac{\pi x}{6} dx = \sum_{k=1}^5 \frac{6k}{\pi} \cos \frac{\pi x}{6} \Big|_k^{k+1} =$$

$$= \frac{6}{\pi} \sum_{k=1}^5 k \left(\cos \frac{\pi k}{6} - \cos \frac{\pi(k+1)}{6} \right) =$$

$$= \frac{6}{\pi} \left(\left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \right) + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right) + \right.$$

$$+ 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{2\pi}{3} \right) + 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6} \right) +$$

$$\left. + 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} - \cos \pi \right) \right) = \frac{6}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{2} + \right.$$

$$- 4 \cos \frac{\pi}{3} + 4 \cos \frac{\pi}{6} - 5 \cos \frac{\pi}{6} + 5) = \frac{30}{\pi}.$$

7. Решение. а) Подынтегральная функция ограничена и разрывна в точке $x = \pi/2$, поэтому

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{8} - 0 - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} \right) = -\frac{\pi^2}{4}.$$

б) Точки разрыва подынтегральной функции – нули функции $y = \sin(\ln x)$, т.е. точки $x_k = e^{-\pi k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Так как

$$\operatorname{sgn}(\sin(\ln x)) = \begin{cases} -1, & x \in (x_{k+1}, x_k), \quad k - \text{чётное}; \\ 1, & x \in (x_{k+1}, x_k), \quad k - \text{нечётное}, \end{cases} =$$

$$= (-1)^{k-1}, x \in (x_{k+1}, x_k),$$

то

$$\int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x)) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \operatorname{sgn}(\sin(\ln x)) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k-1} (e^{-\pi k} - e^{-\pi(k+1)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} (e^{-\pi k} - e^{-\pi(k+1)}) =$$

$$= (1 - e^{-\pi}) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + (-1)^n e^{-\pi(n+1)}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} + 1} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}} = -th \frac{\pi}{2}.$$

в) Множество E состоит из сегментов $[0, \pi]$ и $[2\pi, 3\pi]$. Принимая во внимание, что на каждом из этих сегментов функция $y = \cos x$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, представим интеграл на множестве E в виде суммы интегралов по сегментам $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$, $[2\pi, 5\pi/2]$, $[5\pi/2, 3\pi]$, внутри каждого из которых $\cos x$ сохраняет постоянный знак:

$$\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x} d(\sin x) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{\sin x} d(\sin x) - \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} \sqrt{\sin x} d(\sin x) = \\
 & = \frac{2}{3} \left(\sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} \right) = \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

8. Решение.

$$\int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_{sh1}^{sh2} = \ln \frac{sh2 + \sqrt{1+sh^2 2}}{sh1 + \sqrt{1+sh^2 1}} = \ln \frac{sh2 + ch2}{sh1 + ch1}.$$

Так как $shx + chx = e^x$, то $\ln \frac{sh2 + ch2}{sh1 + ch1} = \ln \frac{e^2}{e} = 1$.

9. Решение. Определяя знак производной f' функции f на каждом из участков монотонности, и используя формулу Ньютона–Лейбница, получим:

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 |f'(x)| dx &= - \int_0^1 f'(x) dx + \int_1^2 f'(x) dx - \int_2^3 f'(x) dx = \\
 &= -f(1) + f(0) + f(2) - f(1) - f(3) + f(2) = 8.
 \end{aligned}$$

10. Решение. а) Функция $t = tgx$ разрывна в точках $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$ (см. теорему 1 раздела 3.2).

б) подстановка $x = 1/t$ не приемлема, так как из того, что $t \in [-1, 1]$, не следует, что $x \in [-1, 1]$ (см. пример 2 раздела 3.2);

в) в точке $x = 0$ подынтегральная функция не определена и, более того, терпит разрыв; разрывная в этой точке функция $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ не может служить

первообразной (см. пример 6 раздела 3.1).

11. Решение. Ответ положителен во всех трёх случаях.

а) Убедимся в выполнении условий теоремы 2 (о подстановках в определённом интеграле): функция $x = \sin t$ – непрерывно дифференцируема на сегменте $[\pi/2, \pi]$ и множеством её значений на этом сегменте является от-

резок $[0, 1]$; функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$; $x(\pi) = 0$, $x(\pi/2) = 1$. Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2t dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt = \frac{\sin 2t}{4} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

б) В этом случае также выполняются условия теоремы 2: функция $x = \sin t$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[2\pi, 5\pi/2]$ и множеством её значений является отрезок $[0, 1]$; функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ непрерывна на $[0, 1]$; $x(2\pi) = 0$, $x(5\pi/2) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2t}{2} + t \right) \Big|_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

в) Убедимся, что и в этом случае выполняются условия теоремы 2: функция $x = \sin t$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[\pi, 5\pi/2]$ и множеством её значений на этом сегменте является отрезок $[-1, 1]$; функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$; $x(\pi) = 0$, $x(5\pi/2) = 1$. Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
 &= - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

12. *Решение.* а) Нет, так как $|\sin t| \leq 1$ и $|\cos t| \leq 1$, а x на промежутке интегрирования принимает значения от 0 до 3.

б)–г) См. разобранный в тексте пособия пример 3 раздела 3.2 с интегралом $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}$.

д) Проверим выполнение условий теоремы 1 (о замене переменной в определённом интеграле) в данном случае: $t = x^2 - 6x + 13$ – непрерывно дифференцируемая на сегменте $[0, 7]$ функция, и множество её значений на $[0, 7]$ является отрезок $[4, 20]$.

Найдём функцию $g(t)$ (она должна быть непрерывна на сегменте $[4, 20]$). Для этого рассмотрим равенство $t = x^2 - 6x + 13$ как квадратное уравнение относительно x и вычислим его корни: $x = 3 \pm \sqrt{t - 4}$, причём для $x \in [0, 3]$ имеем $x = 3 - \sqrt{t - 4}$, а для $x \in [3, 7]$, соответственно, $x = 3 + \sqrt{t - 4}$. Тогда для вычисления интеграла промежутков интегрирования необходимо разбить на две части:

$$\int_0^7 (x^2 - 6x + 13) dx = \int_0^3 (x^2 - 6x + 13) dx + \int_3^7 (x^2 - 6x + 13) dx.$$

В первом интеграле $dx = -\frac{dt}{2\sqrt{t-4}}$, а во втором $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t-4}}$. Получим

$$\begin{aligned} \int_0^7 (x^2 - 6x + 13) dx &= -\frac{1}{2} \int_{13}^4 \frac{tdt}{\sqrt{t-4}} + \frac{1}{2} \int_4^{20} \frac{tdt}{\sqrt{t-4}} = \int_0^3 (p^2 + 4) dp + \\ &\int_0^4 (p^2 + 4) dp = 21 + \frac{112}{3} = \frac{175}{3} \end{aligned}$$

(была использована рационализирующая подстановка $p = \sqrt{t - 4}$).

Как видим, в принципе такую подстановку $t = x^2 - 6x + 13$ в исследуемом интеграле сделать можно, но это нецелесообразно, поскольку гораздо

проще было вычислить данный интеграл непосредственно по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_0^7 (x^2 - 6x + 13) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 13x \right) \Big|_0^7 = \frac{343}{3} - 147 + 91 = \frac{175}{3}.$$

13. *Решение.* Разобьём интеграл по сегменту $[0, 2\pi]$ на сумму трёх интегралов, соответственно, по сегментам $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 2\pi]$, на каждом из которых $\sin x$ монотонен и, следовательно, однозначно находится обратная функция $x(t)$:

$$\int_0^{2\pi} f(x) d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) d(\sin x) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) d(\sin x) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x) d(\sin x).$$

Воспользуемся известным из курса элементарной математики фактом, что функцией, обратной к функции $t = \sin x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$,

$n \in \mathbb{Z}$, является функция $x = (-1)^n \arcsin t + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) d(\sin x) &= \int_0^1 f(\arcsin t) dt + \int_1^{-1} f(\pi - \arcsin t) dt + \\ &+ \int_{-1}^0 f(2\pi - \arcsin t) dt. \end{aligned}$$

14. *Решение.* Функция $f(x)$ имеет разрывы 2-го рода в точках $x = 0$ и $x = 2$, а функция $\arctg(f(x))$, являющаяся первообразной для подынтегральной функции на интервалах $(-1, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, 3)$, имеет разрывы 1-го рода в указанных точках. Поэтому представим интеграл по сегменту $[-1, 3]$ в виде суммы интегралов по сегментам $[-1, 0]$, $[0, 2]$ и $[2, 3]$. При вычислении значений первообразной на концах сегментов (в точках разрыва функции $f(x)$) возьмём в качестве них соответствующие односторонние предельные значения функции $\arctg(f(x))$. Поскольку $f(-1) = 0$, $f(-0) = -\infty$, $f(+0) = +\infty$, $f(2-0) = -\infty$, $f(2+0) = +\infty$, $f(3) = 32/27$, то по формуле Ньютона–Лейбница для каждого из интегралов по сегментам $[-1, 0]$, $[0, 2]$ и $[2, 3]$ получаем:

$$\begin{aligned} I &= \arctg(f(-0)) - \arctg(f(-1)) + \arctg(f(2-0)) - \arctg(f(+0)) + \\ &\quad + \arctg(f(3)) - \arctg(f(2+0)) = \\ &= -\frac{\pi}{2} - 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{32}{27} - \frac{\pi}{2} = \arctg \frac{32}{27} - 2\pi. \end{aligned}$$

15. *Указание:* сделайте замену переменной $t = a + b - x$ во втором интеграле.

16. *Доказательство.* Сделаем линейную подстановку $t = \frac{x-a}{b-a}$, тогда $x = a + (b-a)t$, $dx = (b-a)dt$ и для интеграла получаем

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)t)dt.$$

Так как величина интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, то в правой части полученного равенства можно заменить t на x .

$$\begin{aligned} 17. \text{ Доказательство. } I &= \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xf(a+b-x)dx = \\ &= -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - I. \end{aligned}$$

Выражая из полученного равенства I , доказываем требуемое утверждение.

$$18. \text{ Доказательство. } \text{Сделаем замену } t = x^2 \quad (t \geq 0), \text{ тогда } x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \text{ и } \int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} tf(t)dt. \text{ Поскольку значение определённо-}$$

го интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, то в правой части полученного равенства можно заменить t на x .

19. *Указание:* сделайте подстановку $t = 1 - x$.

20. *Решение.* Полагая $t = x + y$, найдём $y = t - x$, $dy = dt$, и

$$\int_a^b f(x+y)dy = \int_{a+x}^{b+x} f(t)dt.$$

Применяя формулу дифференцирования по верхнему и нижнему переменным пределам

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x), x) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x), x) \cdot \varphi'(x)$$

(это законно, в силу непрерывности $f(x)$ и дифференцируемости функций $\varphi(x) = a + x$ и $\psi(x) = b + x$ при $A - a < x < B - b$), получим

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y)dy = \frac{d}{dx} \int_{a+x}^{b+x} f(t)dt = f(x+b) - f(x+a).$$

21. *Решение.* а) Нецелесообразно напрямую раскрывать 12-ю степень по формуле бинома Ньютона и интегрировать полученный многочлен 25-й степени. Поступим иначе: так как $x dx = -\frac{1}{2} d(2 - x^2)$, то внесём под знак дифференциала функцию $2 - x^2$ и получим

$$\int_0^1 x(2 - x^2)^{12} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (2 - x^2)^{12} d(2 - x^2) = -\frac{1}{2} \frac{(2 - x^2)^{13}}{13} \Big|_0^1 = 315 \frac{1}{26}.$$

б) Произведём рационализирующую подстановку $t = \sqrt[3]{1-x}$, тогда $x = 1 - t^3$, $dx = -3t^2 dt$ и получим

$$\int_1^9 x \cdot \sqrt[3]{1-x} dx = 3 \int_{-2}^0 (1-t^3) t^3 dt = 3 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7} \right) \Big|_{-2}^0 = -66 \frac{6}{7}.$$

в) Положим $x = \frac{1}{\sin t}$, тогда $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{|\sin t|}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t}$, так как $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq -\frac{\pi}{6}$. В результате замены получаем

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos t}{\sin^2 t \cos t} dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{3}.$$

г) Положим $t = \sqrt{1+3x^8}$, тогда $x^8 = \frac{1}{3}(t^2-1)$, $x^7 dx = \frac{tdt}{12}$ и получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1+3x^8} dx &= \int_0^1 x^8 \cdot \sqrt{1+3x^8} x^7 dx = \frac{1}{36} \int_1^2 t^2 (t^2-1) dt = \\ &= \frac{1}{36} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{29}{270}. \end{aligned}$$

22. Решение. а) Полагая $t = \frac{1}{x+1}$, получаем $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$,
 $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2$. Тогда $\int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int_{4/7}^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{4/7}^1 \frac{d\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \left(t - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right|_{4/7}^1 =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{14} + \sqrt{\left(\frac{1}{14}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$

б) Положим $t = e^x$, тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$ и $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx =$
 $= \int_1^2 \sqrt{t-1} \frac{dt}{t}$. Положим теперь $z = \sqrt{t-1}$, тогда $t = z^2 + 1$, $dt = 2zdz$ и
 получим

$$\int_1^2 \sqrt{t-1} \frac{dt}{t} = 2 \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 + 1} = 2 \int_0^1 \frac{(z^2 + 1) - 1}{z^2 + 1} dz = 2 \left(\int_0^1 dz - \int_0^1 \frac{dz}{z^2 + 1} \right) =$$

$$= 2(1 - \arctg 1) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

в) Полагая $x = \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, получаем

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (\text{см. пример 5(б) раздела 3.3}).$$

г) Сделаем замену $t = \frac{1}{x-2}$, тогда

$$\frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt{x^2-10x+13}} = -\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t} - 3}} = -\frac{|t|dt}{\sqrt{1-6t-3t^2}}.$$

Так как на промежутке интегрирования $x < 2$, то $t < 0$ и, следовательно,
 $|t| = -t$:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)^2 \sqrt{x^2-10x+13}} = \int_{\frac{1}{3}}^{-1} \frac{tdt}{\sqrt{1-6t-3t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \frac{(t+1)dt}{\sqrt{\frac{4}{3} - (t+1)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{3} - (t+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{3} - 2t - t^2} \Big|_{-1}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{(t+1)\sqrt{3}}{2} \Big|_{-1}^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

23. Решение.

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} + \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} =$
 $= \int_0^1 \frac{dt}{(e^{-t} + 1)(t^2 + 1)} + \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^{-x} + 1} + \frac{1}{e^x + 1} \right) \frac{dx}{(x^2 + 1)} =$
 $= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4}.$

б) Вычислим неопределённый интеграл, полагая $t = tg(x/2)$:

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(3 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{tg(x/2)}{\sqrt{2}} + C.$$

Заметим, что функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + C$ не является первооб-

разной для $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ на $[0, 2\pi]$, так как разрывна в точке $x = \pi$.

Чтобы получить первообразную для $f(x)$ на $[0, 2\pi]$, рассмотрим функцию

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & x \in [0, \pi); \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + C, & x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Она имеет производную, равную $f(x)$, при всех $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Запишем условие непрерывности этой функции в точке $x = \pi$:

$$\bar{F}(\pi - 0) = \bar{F}(\pi + 0) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C, \text{ откуда } C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Функция $\bar{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & x \in [0, \pi]; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ непрерывна на

$[0, 2\pi]$ и может служить первообразной для функции $f(x)$ на $[0, 2\pi]$. Теперь, применяя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = \bar{F}(2\pi) - \bar{F}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 0}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Более простым и общим является следующий метод вычисления этого интеграла.

Функция

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & x \in [0, \pi); \\ \lim_{x \rightarrow \pi-0} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = 0 \end{cases}$$

есть первообразная для $f(x)$ на сегменте $[0, \pi]$.

Функция

$$F_2(x) = \begin{cases} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & x \in (\pi, 2\pi]; \\ \lim_{x \rightarrow \pi+0} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \pi \end{cases}$$

есть первообразная для $f(x)$ на сегменте $[\pi, 2\pi]$. Используя свойство аддитивности определённого интеграла и формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_2(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

в) Поскольку квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней, то возможна 1-я подстановка Эйлера $t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$. Возводя в квадрат равенство $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$, получим $x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$, или $x + 1 = t^2 - 2tx$, так что

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \quad dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(1 + 2t)^2} dt.$$

Вычислим вначале соответствующий неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{D}{(1 + 2t)^2} \right) dt.$$

Коэффициенты A, B, D вычисляются методом неопределённых коэффициентов: $A = 2$, $B = -3$, $D = -3$. Подставляя эти значения в подынтегральное выражение, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|1 + 2t| + \frac{3}{2(1 + 2t)} + C = \\ &= 2 \ln|\sqrt{x^2 + x + 1} + x| - \frac{3}{2} \ln|1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + \frac{3}{2(1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} + \\ &+ C. \end{aligned}$$

Для получения окончательного ответа осталось взять любую из первообразных (например, отвечающую $C = 0$) и воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница.

Ответ: $\ln(2\sqrt{6\sqrt{3}-9}) + \sqrt{3} - 2$.

24. Решение. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \int_{-1}^1 \frac{d(x - \cos \alpha)}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}$. Сделаем замену $t = x - \cos \alpha$:

$$\begin{aligned} \int_{-1-\cos \alpha}^{1-\cos \alpha} \frac{dt}{t^2 + \sin^2 \alpha} &= \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sin \alpha} \Big|_{-1-\cos \alpha}^{1-\cos \alpha} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\operatorname{arctg} \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} + \operatorname{arctg} \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)} + \operatorname{arctg} \frac{2 \cos^2(\alpha/2)}{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Так как по условию $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, поэтому

в силу тождества $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} z) = z$, $z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, имеем $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) =$

$\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Отсюда получаем, что интеграл равен

$$\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}.$$

25. Решение. По условию, $e^{-\int_0^x f(t) dt} = f(x)$, или, логарифмируя по основанию e , $\int_0^x f(t) dt = -\ln f(x)$. Дифференцируя это равенство, находим

$f(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$, т.е. $f'(x) = -f^2(x)$, причём $f(0) = e^0 = 1$. Решим по-

лученное обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{df}{dx} = -f^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{df}{f^2} = dx$. Интегрируя, находим: $\frac{1}{f} = x + C$, т.е. $f = \frac{1}{x + C}$. Так как

$f(0) = \frac{1}{C} = 1$, то $C = 1$. Окончательно получаем $f(x) = \frac{1}{x + 1}$.

26. Доказательство. Сделаем замену переменной $y = x^2$:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \right).$$

Сделав во втором интеграле замену $z = y - \pi$, преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin y}{\sqrt{y}} - \frac{\sin y}{\sqrt{y + \pi}} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin y \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y + \pi}} \right) dy,$$

что положительно, так как подынтегральная функция положительна на $(0, \pi)$.

27. Доказательство: см. теорему 1 п. 3.5.2.

28. Решение. а) Так как $x \neq 0$ на промежутке интегрирования, то имеем:

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2} dx = \frac{d(x - 1/x)}{(x - 1/x)^2 + 2}, \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx &= \int_1^2 \frac{d(x - 1/x)}{(x - 1/x)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

б) Проверим, будет ли функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}$ первообразной

для подынтегральной функции на сегменте $[-1, 1]$. Так как

$\lim_{x \rightarrow -0} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, а $\lim_{x \rightarrow +0} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, то видим, что в точке $x = 0$ эта

функция терпит разрыв 1-го рода и поэтому не является первообразной. Однако функция

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [-1, 0]; \\ F(x) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

является непрерывной на $[-1, 1]$, и её можно рассматривать как одну из первообразных подынтегральной функции (в обобщённом смысле). Тогда по формуле Ньютона–Лейбница получаем:

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \bar{F}(1) - \bar{F}(-1) = \left(0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

29. *Решение.* а) Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x = atgt$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, тогда $dx = a \frac{dt}{\cos^2 t}$. В результате интеграл примет вид

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \frac{\sin t}{a^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2a^2}.$$

б) Сделаем тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, тогда $dx = a \cos t dt$. Интеграл примет вид

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{tgt}{a^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{3}}.$$

в) Выполним тригонометрическую подстановку $x = a \cos 2t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, тогда $dx = -2a \sin 2t dt$. Приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= -4a \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \cos^2 t dt = 2a \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= a(2t + \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = a \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

30. *Решение.* Поскольку $|\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & \text{если } x \in [1/e, 1], \\ \ln x, & \text{если } x \in [1, e], \end{cases}$, то, используя свойство аддитивности и полагая затем в каждом интеграле $dg = dx$, $f = \ln x$, находим

$$\begin{aligned} \int_{1/e}^e |\ln x| dx &= \int_{1/e}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx = (-x \ln x + x) \Big|_{1/e}^1 + \\ &+ (x \ln x - x) \Big|_1^e = 2(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

31. *Решение.* а) Вначале разобьём интеграл на два интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi} e^x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} e^x dx + \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} (I_1 + I_2). \text{ Найдём } I_1 = \int_0^{\pi} e^x dx = e^x \Big|_0^{\pi} = e^{\pi} - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} e^x \sin 2x dx = \\ &= e^{\pi} - 1 + 2 \left(e^x \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx \right) = e^{\pi} - 1 - 4I_2, \end{aligned}$$

откуда $I_2 = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)$.

$$\text{Таким образом, } \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(e^{\pi} - 1 + \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1) \right) = \frac{3}{5}(e^{\pi} - 1).$$

б) Положим $x^2 dx = dg$, $f = \ln^2 x$, тогда $g = \frac{x^3}{3}$, $df = \frac{2 \ln x dx}{x}$ и, интегрируя по частям, получим

$$\int_1^e (x \ln x)^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

Вычислим интеграл $\int_1^e x^2 \ln x dx$, опять применяя интегрирование по частям:

возьмём $dg = x^2 dx$, $f = \ln x$, тогда $g = \frac{x^3}{3}$, $df = \frac{dx}{x}$, и получаем

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Подставляя, окончательно находим

$$\int_1^e (x \ln x)^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3 - 2}{27}.$$

32. Доказательство. Так как $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{25-x+x^2}} \leq \frac{2}{3\sqrt{11}}$ при $x \in [0,1]$,

и по формуле интегрирования по частям $\int_0^1 x e^x dx = 1$, то имеем:

$$\frac{1}{5} = \int_0^1 \frac{1}{5} x e^x dx \leq \int_0^1 \frac{x e^x dx}{\sqrt{25-x+x^2}} \leq \int_0^1 \frac{2}{3\sqrt{11}} x e^x dx = \frac{2}{3\sqrt{11}}.$$

33. Доказательство. Достаточно доказать, что $\int_0^1 (2x-1)f(x)dx \leq 0$. Но

это неравенство вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x-1)f(x)dx &= \int_0^1 f(x)d(x^2-x) = (x^2-x)f(x) \Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 (x-x^2)f'(x)dx \leq 0, \text{ в силу отрицательности } f'(x). \end{aligned}$$

34. Решение. а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(x^n) dx = 1$, так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0, x \in [0,1), \\ 1, x = 1; \end{cases}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(x^n) = \begin{cases} 1, x \in [0,1), \\ \cos 1, x = 1; \end{cases}$ (можно воспользоваться геометрическим смыслом определённого интеграла).

б) Положив $t = x^n$, находим $x = \sqrt[n]{t}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$, и для интеграла получаем:

$$I = \int_1^{\pi} \cos(x^n) dx = \frac{1}{n} \int_1^{\pi^n} \frac{\cos t}{t^{\frac{1}{n}-1}} dt = \frac{1}{n} \int_1^{\pi^n} \frac{d(\sin t)}{t^{\frac{1}{n}-1}}.$$

Вычислим последний интеграл по частям:

$$I = \frac{1}{n} \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{n}-1}} \Big|_1^{\pi^n} + \frac{n-1}{n^2} \int_1^{\pi^n} \frac{\sin t}{t^{\frac{2}{n}-1}} dt.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{n}-1}} \Big|_1^{\pi^n} = 0$ и $\frac{n-1}{n^2} \left| \int_1^{\pi^n} \frac{\sin t}{t^{\frac{2}{n}-1}} dt \right| \leq \frac{n-1}{n^2} \int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-2} dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n\pi^{n-1}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то отсюда получаем $I \rightarrow 0$.

Предположим теперь, что для вычисления предела вы решили воспользоваться 1-й теоремой о среднем. Проверим возможность этого. Имеем

$$\int_1^{\pi} \cos(x^n) dx = \cos(\xi^n) \int_1^{\pi} dx = (\pi-1)\cos(\xi^n), \text{ где } 1 < \xi < \pi.$$

Но тогда $\xi^n \rightarrow +\infty$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\pi-1)\cos(\xi^n)$ не существует.

На самом деле, как мы видели, данный предел существует и равен 0. Причина кажущегося противоречия в том, что промежуточное значение ξ в рассматриваемом случае не является константой, а зависит от n , т.е. $\xi = \xi(n)$. Если при $n \rightarrow +\infty$ функция $\xi(n) \rightarrow 1$, то, вообще говоря, имеем неопределённость вида 1^∞ , и для нахождения значения $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\pi-1)\cos(\xi(n)^n)$ необходима дополнительная информация относительно «скорости» приближения ξ к 1 (для раскрытия неопределённости). Непосредственное вычисление данного интеграла по частям снимает эту проблему.

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \cos(x^n) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \cos(x^n) dx + \int_1^{\pi} \cos(x^n) dx \right).$$

35. Решение. а) Интегрируя по частям, имеем:

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} \int_a^b f(x) d(\cos nx) =$$

$$= -\frac{1}{n} f(x) \cos nx \Big|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos nx dx.$$

Так как $\left| \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos nx dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_a^b |f'(x)| dx$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

б) Аналогично рассмотренному выше.

в) *Указание:* воспользуйтесь формулой

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) = \sin \alpha \cos \beta.$$

36. Решение. Подынтегральная функция $f(x) = x^m (\ln x)^n$ не определена на левом конце промежутка интегрирования – в точке $x = 0$, а значит, не интегрируема на отрезке $[0, 1]$. Однако у неё существует в этой точке конечный правый предел, равный нулю. Рассмотрим функцию

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция, являясь непрерывной на сегменте $[0, 1]$, интегрируема на нём, причём

$$I_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \bar{f}(x) dx.$$

Интегрируя по частям, находим

$$I_n = \frac{x \bar{f}(x)}{m+1} \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1},$$

откуда получаем искомую рекуррентную формулу понижения

$$I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

Применяя её последовательно необходимое число раз, придём к следующему результату

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}},$$

так как $I_0 = \int_0^1 x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$.

37. Решение. Обозначим $I(2m, 2n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$. Интегрируя

по частям ($dg = \cos x dx$, $f = \sin^{2m} x \cos^{2n-1} x$), находим формулу понижения по параметру n :

$$I(2m, 2n) = \frac{2n-1}{2m+1} I(2m+2, 2n-2).$$

Применяя эту формулу последовательно $n-1$ раз и учитывая результаты примера 5 из раздела 3.3, получим:

$$I(2m, 2n) = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{(2m+1)(2m+3) \cdots (2m+2n-1)} I(2m+2n, 0) =$$

$$= \frac{(2n-1)!! (2m+2n-1)!!}{((2m+1)(2m+3) \cdots (2m+2n-1))(2m+2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$\frac{(2n-1)!! (2m-1)!! \pi}{2(2m+2n)!!}.$$

Можно записать полученный результат только через одинарный факториал:

$$\frac{(2n-1)!! (2m-1)!! \pi}{2(2m+2n)!!} = \frac{(2n)!! (2m)!! \pi}{2^{m+n+1} (m+n)! \cdot 2^{m+n} m! n!} = \frac{(2n)!! (2m)!! \pi}{2^{2m+2n+1} (m+n)! m! n!}.$$

38. Решение. а) Так как $\cos(nx+x) = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x$, то

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cos((n+1)x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cos nx \cos x dx -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin nx dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое (полагая

$$dg = \sin^{n-1} x \cos x dx = \frac{1}{n} d(\sin^n x), \quad f = \cos nx), \text{ находим}$$

$$I_n = \frac{\sin^n x \cos nx}{n} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin nx dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin nx dx = 0.$$

б) Аналогично поступая, получим, что интеграл равен нулю.

39. Решение. Подынтегральная функция не определена в точке $x = \frac{\pi}{2}$ и, более того, не ограничена в левой её окрестности, поэтому не интегрируема по Риману на сегменте $[0, \pi/2]$ (интеграл может существовать лишь в несобственном смысле). Однако, например, функция $f(x) = (\cos(2n-2)x + \cos 2nx) \ln \cos x = 2 \cos(2n-1)x \cos x \ln \cos x$, $x \in [0, \pi/2)$, $f(\pi/2) = 0$, очевидно, интегрируема по Риману на $[0, \pi/2]$. Проинтегрировав её по частям, получим

$$\begin{aligned} I_n + I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2 \left(\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \cos x \ln \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} + \\ &+ \frac{1}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x \sin x dx + \\ &+ \frac{1}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x \sin x \ln \cos x dx = \frac{1}{2n-1} (I_{n-1} - I_n), \end{aligned}$$

откуда находим формулу понижения $I_n = -\frac{n}{n-1} \cdot I_{n-1}$. Применяя соответствующее число раз это рекуррентное соотношение, получаем

$$I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot I_1.$$

Осталось найти I_1 . Имеем

$$\begin{aligned} I_1 + I_0 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ln \cos x dx = \\ &= 2 \sin x \cos x \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ln \cos x dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \\ &= I_0 - I_1 + \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } I_1 = \frac{\pi}{4}, \text{ поэтому } I_n = \frac{(-1)^{n-1} \pi}{4n}. \end{aligned}$$

40. Доказательство.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x+T) dx = \int_a^b f(x+T) d(x+T) = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx.$$

41. Доказательство. 1) *Необходимость.* Так как $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, то

из периодичности F с периодом T следует, что

$$F(T) = \int_0^T f(t) dt + C = F(0) = C, \text{ откуда } \int_0^T f(t) dt = 0.$$

2) *Достаточность.* Если $\int_0^T f(t) dt = 0$, то $F(x) = \int_0^x f(t+T) dt + C =$

$$= \int_T^{T+x} f(\tau) d\tau + C = \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_T^{T+x} f(\tau) d\tau + C = F(x+T).$$

42. Доказательство: см. теорему 2 п. 3.5.1.

43. Доказательство. Так как функция непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, то у неё существует первообразная на этом множестве, обозначим её $F(x)$. Тогда для

произвольного x имеем: $\int_x^{x+1} f(t) dt = F(x+1) - F(x)$, причём, по условию,

$F(x+1) - F(x) \equiv 0$. Это означает периодичность с периодом, равным 1, функции $F(x)$. Продифференцировав равенство $F(x+1) \equiv F(x)$ по x , получаем: $f(x+1) \equiv f(x)$, т.е. функция $f(x)$ периодична (с тем же периодом 1).

44. Доказательство. Рассмотрим функцию $\tilde{F}(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{A}{T} \right) dt$. Так

как $\int_0^T \left(f(t) - \frac{A}{T} \right) dt = 0$, то, по задаче 41, $\tilde{F}(x)$ – периодическая функция с

периодом T . Но $\tilde{F}(x) = F(x) - \frac{A}{T}x$, откуда и следует требуемое утверждение.

45. Решение. Подынтегральная функция периодична с периодом $\pi/2$, поэтому

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 x) dt}{1 + \tan^4 x} =$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + t^2) dt}{1 + t^4}. \text{ В силу задачи 28 получаем } I = 2\sqrt{2}\pi.$$

46. Доказательство: см. пример 6 в разделе 3.2.

47. Доказательство. Воспользуемся свойством аддитивности определённого интеграла

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

а также тем, что интеграл от непрерывной функции численно равен алгебраической сумме соответствующих площадей криволинейных трапеций (площади фигур, расположенных выше оси Ox , берутся со знаком «плюс», а площади остальных фигур, лежащих ниже этой прямой, — со знаком «минус»).

В первом случае, когда функция $f(x)$ — чётная, плоская фигура имеет ось симметрии Oy , и поэтому полная площадь трапеции равна удвоенной площади одной из симметричных частей. Во втором случае криволинейная трапеция представляет собой объединение двух фигур, центрально симметричных друг другу относительно начала координат, поэтому интеграл (алгебраическая, с учётом знака, сумма площадей) равен нулю.

См. также задачу 27.

48. Доказательство. 1) Пусть, ради определённости, функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-a, a)$ и является чётной. Тогда любая функция вида

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + C,$$

где C — произвольная постоянная, является первообразной для $f(x)$ на $(-a, a)$. Покажем, что функция $F(x)$ будет нечётной тогда и только тогда, когда $C = 0$. В самом деле,

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C = - \int_0^x f(z) dz + C$$

(после замены $z = -t$ и в силу того, что f — чётная функция), и поэтому равенство $F(-x) = -F(x)$ будет выполняться при всех $x \in (-a, a)$, только если $C = 0$.

2) Пусть теперь на том же интервале функция $f(x)$ является нечётной. Пусть $F(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$. Тогда найдётся такая постоянная C , что $F(x)$ представима в виде $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$.

Покажем, что это чётная функция. Действительно, для любого $x \in (-a, a)$ имеем

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C = \int_0^x f(z) dz + C$$

(замена переменной $z = -t$ и в силу того, что f — нечётная функция).

49. Ответ: а) 0; б) 0 (функции нечётные, а промежуток интегрирования симметричен относительно точки $x = 0$, см. задачу 47).

50. Доказательство.

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin(t + \pi) + n(t + \pi)) dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt + n\pi) dt = (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt - \sin t) dt = 0,$$

в силу нечётности подынтегральной функции.

51. Указание: воспользуйтесь результатом задачи 41.

52. Доказательство: см. теорему в пункте 3.5.3.

53. Решение.

$$1) \int_0^1 \arctg x dx = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 1} = \arctg 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4} -$$

$$- \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

$$2) \int_0^1 \arctg x dx = 1 \cdot \arctg 1 - 0 \cdot \arctg 0 - \int_{\arctg 0}^{\arctg 1} t g y dy = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin y dy}{\cos y} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi/4} \frac{d \cos y}{\cos y} = \frac{\pi}{4} + (\ln |\cos y|) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

54. Решение. 1-й способ.

$$a) \int_0^1 \arcsin x dx = 1 \cdot \arcsin 1 - 0 \cdot \arcsin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = \frac{\pi}{2} - 1;$$

b) аналогично получаем e^2 ; c) $2(1 - \ln 2)$.

2-й способ. a) $\int_0^1 \arcsin x dx$ есть разность площадей прямоугольника

$OABC$ (его площадь равна $1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$) и площади фигуры OBC (её пло-

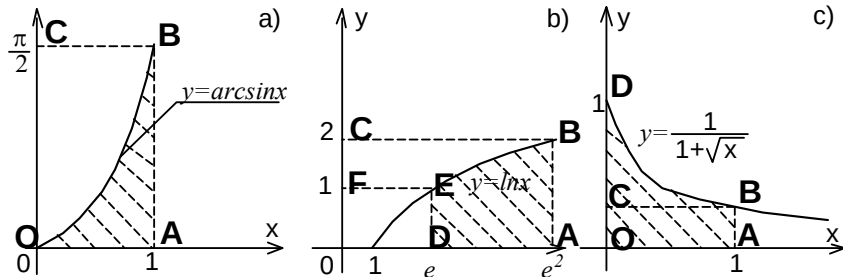
щадь равна $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = 1$).

b) $\int_e^{e^2} \ln x dx$ равен разности площадей фигур $DABCFED$ и $FEBCF$;

площадь последней равна $\int_1^2 e^y dy = e^2 - e$. Следовательно,

$$\int_e^{e^2} \ln x dx = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

c) Найдите сумму площадей прямоугольника $OABC$ и фигуры BCD .



$$55. \text{Решение. а) } \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{chx dx}{\sqrt{4 - sh^2 x}} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{d(shx)}{\sqrt{4 - sh^2 x}}. \text{ Замена } t = shx$$

приводит к табличному интегралу $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

$$б) \int_0^{\ln 2} th^2 x dx = \int_0^{\ln 2} \frac{sh^2 x}{ch^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{ch^2 x - 1}{ch^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \left(1 - \frac{1}{ch^2 x} \right) dx =$$

$$= (x - thx) \Big|_0^{\ln 2} = \left(x - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) \Big|_0^{\ln 2} = \ln 2 - \frac{3}{5}.$$

в) Проинтегрируем по частям, положив $dv = chx$, $u = x$:

$$\int_0^{\ln 3} x chx dx = x shx \Big|_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} shx dx = \frac{4}{3} \ln 3 - chx \Big|_0^{\ln 3} =$$

$$= \frac{4}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} = \frac{2(2 \ln 3 - 1)}{3}.$$

56. Доказательство. Для доказательства первой из формул воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n = 1$ имеем $chx + shx = ch(x) + sh(x)$ — верно.

2) Предположим, что тождество верно при некотором произвольном $n = k \geq 1$, т.е. что $(chx + shx)^k = ch(kx) + sh(kx)$, и покажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$. В самом деле, $(chx + shx)^{k+1} =$

$$= (chx + shx)^k (chx + shx) = (ch(kx) + sh(kx)) (chx + shx) =$$

$$= (ch(kx)chx + sh(kx)shx) + (sh(kx)chx + ch(kx)shx) =$$

$$= ch((k+1)x) + sh((k+1)x),$$

что и требовалось показать.

Для доказательства второй формулы заметим, что она является следствием первой: достаточно подставить в доказанное тождество $(-x)$ вместо x и воспользоваться свойствами чётности chx и нечётности shx .

Итак, имеем:

$$a) \int_0^{0,1 \ln 2} (chx + shx)^{10} dx = \int_0^{0,1 \ln 2} (ch(10x) + sh(10x)) dx =$$

$$= \frac{1}{10} (sh(10x) + ch(10x)) \Big|_0^{0,1 \ln 2} = \frac{1}{10} (sh(\ln 2) + ch(\ln 2) - sh 0 - ch 0) =$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4} - 1 \right) = 0,1.$$

$$\text{б) } \int_0^{0,1 \ln 2} (chx - shx)^{10} dx = \int_0^{0,1 \ln 2} (ch(10x) - sh(10x)) dx =$$

$$= \frac{1}{10} (sh(10x) - ch(10x)) \Big|_0^{0,1 \ln 2} = \frac{1}{10} (sh(\ln 2) - ch(\ln 2) - sh 0 + ch 0) =$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4} + 1 \right) = 0,05.$$

57. *Решение.* Докажем первую из формул понижения:

$$ch^3 x = \frac{(e^x + e^{-x})^3}{2^3} = \frac{(e^{3x} + e^{-3x}) + (3e^x + 3e^{-x})}{8} = \frac{1}{4} ch 3x + \frac{3}{4} ch x$$

(вторая формула доказывается аналогично). Тогда

$$\text{а) } \int_0^{\frac{1}{3} \ln 2} ch^3 x dx = \int_0^{\frac{1}{3} \ln 2} \left(\frac{1}{4} ch 3x + \frac{3}{4} ch x \right) dx = \frac{1}{12} sh 3x \Big|_0^{\frac{1}{3} \ln 2} + \frac{3}{4} sh x \Big|_0^{\frac{1}{3} \ln 2} =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{8} (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^{-1}});$$

$$\text{б) } \int_0^{\ln a} sh^5 x dx = \int_0^{\ln a} \left(\frac{1}{16} sh 5x - \frac{5}{16} sh 3x + \frac{5}{8} sh x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{ch 5x}{80} - \frac{5ch 3x}{48} + \frac{5ch x}{8} \right) \Big|_0^{\ln a} =$$

$$= \frac{1}{80} (ch(\ln a^5) - 1) - \frac{5}{48} (ch(\ln a^3) - 1) + \frac{5}{8} (ch(\ln a) - 1) =$$

$$= \frac{1}{80} \left(\frac{a^5 + a^{-5}}{2} - 1 \right) - \frac{5}{48} \left(\frac{a^3 + a^{-3}}{2} - 1 \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{a + a^{-1}}{2} - 1 \right).$$

58. *Указание.* Предварительно докажите, что:

$$\text{а) } \int x^2 ch x dx = x^2 sh x - 2x ch x + 2sh x + C;$$

$$\text{б) } \int sh^4 x dx = \frac{1}{32} sh 4x - \frac{1}{4} sh 2x + 6x + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{thx}{\sqrt{chx - 1}} dx = 2 \arctg \sqrt{chx - 1} + C;$$

$$\text{г) } \int sh x \sin x dx = \frac{1}{2} (ch x \sin x - sh x \cos x) + C;$$

$$\text{д) } \int \frac{sh(x/2)}{ch^3(x/2)} dx = th^2 \frac{x}{2} + C;$$

$$\text{е) } \int sh^3(x/3) ch^2(x/3) dx = \frac{3}{5} ch^5 \frac{x}{3} - ch^3 \frac{x}{3} + C.$$

$$59. \text{ Доказательство. а) Так как } 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 = \frac{1 - (-x)^6}{1 + x},$$

где $x \neq -1$, то $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \frac{x^6}{1+x}$. Требуемое равенство получается из последнего почленным интегрированием.

б) *Указание:* воспользуйтесь равенством

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} = \frac{1 - (-x^2)^7}{1 + x^2}.$$

60. *Решение.* а) Разложим подынтегральную функцию на сумму элементарных дробей:

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2}.$$

Определив методом неопределённых коэффициентов значения A, B и C , приходим к интегралу

$$\int_3^5 \frac{x+1}{(x-1)x(x-2)} dx = \int_3^5 \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x-2)} \right) dx =$$

$$= \left(-2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-2| \right) \Big|_3^5 = \ln \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} &= \int_0^1 \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{25} \int_0^1 \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25} \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25} \int_0^1 \frac{dx}{(x-3)(x+2)} = \\ &= \frac{1}{25} \int_0^1 \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25} \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{125} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \left(-\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125} \ln|x-3| + \frac{2}{125} \ln|x+2| \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{75} + \frac{4}{125} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

61. Ответ: а) $8 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{48}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $4 - \pi$;

д) $\frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$.

62. Ответ: а) $x = 2$; б) $x = 2 \ln 2$.

§4.

1. Решение. Нельзя, так как конечного предела такие интегральные суммы иметь не будут (результат существенным образом будет зависеть от выбора точек ξ_k).

2. Решение. Если интеграл (1) сходится неабсолютно, то интеграл (2) может расходиться. Например, пусть $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x) = \sin x$ – ограниченная функция. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ – расходится. Может, конечно, случиться, что интеграл (2) будет сходящимся (например, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x) = 2 \cos x$). Следовательно, интеграл (2) не обязательно сходится.

Пусть теперь интеграл (1) сходится абсолютно, тогда из неравенства $|f(x)\varphi(x)| \leq C|f(x)|$ следует абсолютная сходимость интеграла (2), а значит, и его сходимость.

3. Доказательство. По теореме сравнения указанные утверждения следуют из неравенств:

$$|f(x)| \leq \frac{1+f^2(x)}{2}, \quad (f(x)+g(x))^2 \leq 2(f^2(x)+g^2(x)),$$

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}.$$

4. Решение. а) Интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^x (\sin^2 t + \cos^2(t\sqrt{2})) dt &= \frac{1}{2} \int_0^x (1 - \cos 2t + 1 + \cos(2t\sqrt{2})) dt = \\ &= x + \frac{\sin(2\sqrt{2}x)}{4\sqrt{2}} - \frac{\sin 2x}{4}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} M[f] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{\sin(2\sqrt{2}x)}{4\sqrt{2}} - \frac{\sin 2x}{4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin(2\sqrt{2}x)}{4\sqrt{2}x} - \frac{\sin 2x}{4x} \right) = 1. \end{aligned}$$

б) Применяя вторую теорему о среднем, находим

$$\int_0^x \sqrt{t} \sin t dt = \sqrt{x} \int_{\xi}^x \sin t dt = \sqrt{x} (\cos \xi - \cos x), \quad 0 < \xi < x.$$

Отсюда $\left| \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{t} \sin t dt \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ при достаточно больших x ($\varepsilon > 0$ —

произвольное, наперёд заданное число). Поэтому $M[\sqrt{x} \sin x] = 0$.

5. *Решение.* Пусть $A \neq 0$. Произведя замену переменной $t = nx$, получим

$$\int_0^1 f(nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt = \varphi_n.$$

Но φ_n есть значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ при $x = n$. Применяя

правило Лопиталя для раскрытия имеющейся неопределённости (см. задачу 3 §2), находим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt \right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

Следовательно, и $\varphi_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow +\infty$, а поэтому $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx = A$.

Случай $A = 0$ рассмотрите самостоятельно.

6. *Решение.* а)–б) Обозначим $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ и $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$.

Заметим, что данные интегралы являются несобственными интегралами 2-го рода (функция $\ln(\sin x)$ имеет особую точку $x = 0$, а $\ln(\cos x)$ — особую точку $x = \pi/2$).

1) Покажем, что интегралы равны. В самом деле, сделаем во втором интеграле замену $t = \frac{\pi}{2} - x$, тогда

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) d\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = I_1.$$

2) Вычислим их, воспользовавшись очевидным равенством $2I_1 = I_1 + I_2$. Итак,

$$\begin{aligned} 2I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx. \end{aligned}$$

Положим в первом интеграле $t = 2x$:

$$\begin{aligned} 2I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t) dt \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Сделаем в последнем из интегралов замену $z = \pi - t$. Тогда получим

$$\begin{aligned} 2I_1 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\pi - z)) d(\pi - z) \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z) dz \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (I_1 + I_1) - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \\ &= I_1 - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Выражая I_1 из полученного равенства, находим $I_1 = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

в) Отметим, что подынтегральная функция непрерывна и ограничена на сегменте $[0, \pi/2]$, т.е. данный интеграл собственный.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{|a|^2 \sin^2 x + |b|^2 \cos^2 x} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{|b|^2 \cos^2 x \left(\left(\frac{|a|}{|b|} \operatorname{tg} x \right)^2 + 1 \right)} = \frac{1}{|ab|} \int_0^{\pi/2} \frac{d\left(\frac{|a|}{|b|} \operatorname{tg} x \right)}{\left(\frac{|a|}{|b|} \operatorname{tg} x \right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{|ab|} \operatorname{arctg} \left(\frac{|a|}{|b|} \operatorname{tg} x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{|ab|} (\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2|ab|}. \end{aligned}$$

Замечание. При вынесении множителя $|b|^2 \cos^2 x$ за скобку в знаменателе дроби и внесении образовавшегося выражения $\left| \frac{a}{b} \right| \frac{1}{\cos^2 x}$ под знак дифференциала исходный собственный интеграл преобразуется в несобственный (подстановка $t = \left| \frac{a}{b} \right| \operatorname{tg} x$ приводит к интегралу $\frac{1}{|ab|} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}$).

7. *Решение.* а) По определению главного значения,

$$\begin{aligned} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int_{-A}^A \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{atctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{-A}^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg}(-A) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+A^2}{1+(-A)^2} \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (2\operatorname{arctg} A) = \pi. \end{aligned}$$

б) По определению главного значения,

$$\begin{aligned} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{-A}^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(A \operatorname{arctg} A - \frac{1}{2} \ln(1+A^2) - (-A) \operatorname{arctg}(-A) + \frac{1}{2} \ln(1+(-A)^2) \right) = 0. \end{aligned}$$

в) По определению главного значения,

$$\begin{aligned} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sin x \Big|_{-A}^A) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sin A - \sin(-A)) = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \sin A. \end{aligned}$$

Как видно, данный предел, а, следовательно, и главное значение интеграла, не существуют.

8. *Решение.* а) Интеграл несобственный 2-го рода (на промежутке интегрирования имеется единственная особая точка $x=1$). Так как при $x \rightarrow 1+0$ подынтегральная функция $\frac{x^2}{(x-1)^5}$ является бесконечно большой функцией одного порядка роста с бесконечно большой функцией $\frac{1}{(x-1)^5}$, т.е. $\frac{x^2}{(x-1)^5} = O\left(\frac{1}{(x-1)^5}\right)$, причём $5 > 1$, то, согласно 3-му признаку сравнения (сравнения со степенью), интеграл расходится.

б) Интеграл несобственный 2-го рода. Особая точка $x=1$. При $x \rightarrow 1+0$ имеем: $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = O\left(\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\right)$, и, поскольку $\frac{2}{3} < 1$, то данный интеграл сходится (в том числе абсолютно).

в) Интеграл $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$ несобственный 1-го рода (единственная особая точка $x=+\infty$). Обозначим подынтегральную функцию $f(x) = x^5 e^{-x}$, и исследуем на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$ (нижний предел можно взять любым). Воспользуемся для этого 2-м признаком сравнения.

При $x \rightarrow +\infty$ сравним порядки малости двух бесконечно малых функций $f(x)$ и $g(x) = \frac{1}{x^p}$, где $p > 1$ – некоторое число. Очевидно, интеграл $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ – сходится. Рассмотрим предел отношения этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 e^{-x}}{1/x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-p-5}} = 0$$

при любых $p > 1$, поскольку показательная функция на бесконечности убывает быстрее любой степенной (воспользовались известным фактом, что

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$, $a > 1, k > 0$). Согласно 2-му признаку сравнения, в этом случае из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ следует сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} x^5 e^{-x} dx, \text{ а значит, и интеграла } \int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx.$$

9. *Решение.* а) Единственная особая точка $x = +\infty$. При $x \rightarrow +\infty$ оценим порядок малости подынтегральной функции: $\frac{1+x^2}{x^3} = \frac{1/x^2 + 1}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right)$, следовательно, по 3-му признаку сравнения, интеграл расходится.

б) Единственная особая точка $x = +\infty$. Имеем при $x \rightarrow +\infty$: $\arctg x \sim \frac{\pi}{2}$, $\sqrt{1+x^3} \sim x^{3/2}$, поэтому $\frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^3}} = O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$. Так как $1/2 < 1$, то, по 3-му признаку сравнения для особенностей 1-го рода, интеграл расходится.

в) Единственная особая точка $x = 1$. При $x \rightarrow 1-0$ имеем: $e^{\sqrt[3]{x}} - 1 \sim x^{1/3}$, поэтому $\frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1} = O\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)$, и, поскольку $1/3 < 1$, по 3-му признаку сравнения для интегралов 2-го рода, интеграл сходится.

г) Единственная особая точка $x = 0$. Так как при $x \rightarrow +0$ имеем: $\tg x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, то для подынтегральной функции получаем $\frac{1}{\tg x - x} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, и, поскольку $3 > 1$, по 3-му признаку сравнения для интегралов 2-го рода, интеграл расходится.

д) Единственная особая точка $x = +\infty$. Имеем при $x \rightarrow +\infty$:

$$\cos \frac{2}{x} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{2}{x}\right)^2\right) = 1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Тогда $1 - \cos \frac{2}{x} = \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, следовательно, по 3-му признаку сравнения для интегралов 1-го рода, интеграл сходится.

10. *Решение.* а) На промежутке интегрирования имеются две особые точки $x = 1$ (2-го рода) и $x = +\infty$ (1-го рода). Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} = \int_1^3 \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} = I_1 + I_2,$$

и исследуем сходимость каждого из интегралов I_1 и I_2 в отдельности.

При $x \rightarrow 1+0$ подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}}$ является бесконечно большой функцией. Используя известные соотношения эквивалентности, оценим её порядок роста:

$$\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\ln(1+(x-1))}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \text{ т.е. } f(x) = O\left(\frac{1}{(x-1)^{1/2}}\right).$$

Так как $1/2 < 1$, то интеграл I_1 сходится (по 3-му признаку сравнения, в том числе абсолютно).

При $x \rightarrow +\infty$ имеем: $\left| \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} \right| \leq \frac{1}{x^2}$. Так как интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (по 3-му признаку), то, согласно 1-му признаку сравнения (признаку абсолютной сходимости), из его сходимости следует сходимость (причём абсолютная) интеграла I_2 .

Наконец, поскольку оба интеграла I_1 и I_2 сходятся, то сходится и их сумма.

б) Так как при $x \rightarrow +0$ подынтегральная функция имеет конечный предел, то точка $x = 0$ не является особой, и, следовательно, единственная особая точка $x = +\infty$ (интеграл несобственный 1-го рода). Оценим при $x \rightarrow +\infty$ порядок малости бесконечно малой функции $\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ по

сравнению с функцией $\frac{1}{x} : \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Так как

$2 > 1$, то, согласно 3-му признаку сравнения для интегралов 1-го рода, интеграл сходится.

в) Подынтегральная функция является бесконечно большой при $x \rightarrow 1-0$. Оценим порядок её роста по сравнению с бесконечно большой

функцией $\frac{1}{1-x}$. Так как $\cos^2 x \rightarrow \cos^2 1$, $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$,

причём $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, то $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = O\left(\frac{1}{(1-x)^{1/3}}\right)$. Тогда, по 3-му признаку сравнения, интеграл сходится.

г) При $x \rightarrow +\infty$ имеем: $\frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} = O\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right)$, и так как $\frac{5}{3} > 1$, то, по

3-му признаку сравнения для интегралов 1-го рода, интеграл сходится.

д) На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x=0$ и $x=+\infty$.

При $x \rightarrow +0$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^9}}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{1+\sqrt{x^7}})}} = O\left(\frac{1}{x^{1/4}}\right),$$

поэтому интеграл сходится (по 3-му признаку сравнения для интегралов 2-го рода).

При $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^9}}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^9}\left(1+1/\sqrt{x^7}+1/\sqrt{x^5}\right)}} = O\left(\frac{1}{x^{9/8}}\right),$$

поэтому интеграл сходится (по 3-му признаку сравнения для интегралов 1-го рода).

Таким образом, исходный интеграл сходится.

11. Решение. а) На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

Используя свойство аддитивности, разобьём интеграл на сумму двух интегралов, в каждом из которых останется по одной особой точке:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x} = \int_0^1 \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x} + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x} = I_1 + I_2.$$

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся интегралы I_1 и I_2 .

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $x \rightarrow +0$ имеем: $\sin x \sim x$, $\cos x \sim 1$, поэтому

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = O\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

По 3-му признаку сравнения, интеграл I_1 сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

2) Исследуем на сходимость интеграл I_2 . При $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$ имеем:

$$\sin x \sim 1, \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \sim \frac{\pi}{2}-x,$$

поэтому $\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = O\left(\frac{1}{(\pi/2-x)^q}\right)$. По 3-му признаку сравнения,

интеграл I_2 сходится тогда и только тогда, когда $q < 1$.

Итак, интеграл I сходится, если одновременно $p < 1$ и $q < 1$ (и расходится в остальных случаях).

б) Если на промежутке $[0, +\infty)$ многочлен $P_n(x)$, находящийся в знаменателе, имеет действительный корень $x=x_k$ кратности p_k ($p_k \in \mathbb{N}$), то интеграл расходится по 3-му признаку сравнения, так как в малой окрестности точки x_k имеем:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O\left(\frac{1}{(x-x_k)^{p_k}}\right).$$

Если же многочлен $P_n(x)$ не имеет корней на $[0, +\infty)$, то для сходимости интеграла достаточно потребовать, чтобы $n-m > 1$, т.к. при $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right).$$

Окончательно, интеграл сходится, если $P_n(x)$ не имеет корней на $[0, +\infty)$ и $n - m > 1$.

в) На промежутке интегрирования имеются две особые точки: $x = 0$ (является особой при $m < 0$) и $x = +\infty$. Разобьём интеграл на два

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = \int_0^A \frac{x^m}{1+x^n} dx + \int_A^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = I_1 + I_2,$$

и исследуем каждый из них на сходимость.

1) При $x \rightarrow +0$ имеем: $\frac{x^m}{1+x^n} = O\left(\frac{1}{x^{-m}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 будет сходиться тогда и только тогда, когда $-m < 1$, т.е. $m > -1$.

2) При $x \rightarrow +\infty$ имеем: $\frac{x^m}{1+x^n} = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, поэтому по 3-му признаку сравнения интеграл I_2 будет сходиться тогда и только тогда, когда $n - m > 1$, т.е. $m < n - 1$.

Итак, интеграл I сходится, если (и только если) одновременно сходятся интегралы I_1 и I_2 , т.е. при $-1 < m < n - 1$.

12. Решение. а) При $x \rightarrow +0$, используя соотношение эквивалентности $\arctg(ax) \sim ax$, получаем, что подынтегральная функция

$$\frac{\arctg(ax)}{x^n} = O\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

а при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\arctg(ax) = \begin{cases} \pi/2, a > 0; \\ -\pi/2, a < 0; \end{cases}$ поэтому

$$\frac{\arctg(ax)}{x^n} = O\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Следовательно, по 3-му признаку сравнения, интеграл сходится тогда и только тогда, когда одновременно $n - 1 < 1$ и $n > 1$, т.е. при $1 < n < 2$.

б) Так как при $t \rightarrow 0$ имеем разложение

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n} + o(t^n),$$

то, полагая $t = \frac{1}{x}$, при $x \rightarrow +\infty$ для подынтегральной функции получим

$$\begin{aligned} \frac{x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^p} &= \frac{x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)}{x^p} = \\ &= \frac{x - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^p}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, по 3-му признаку сравнения, интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

в) В окрестности точки $x = 0$ для подынтегральной функции имеем следующее разложение по формуле Маклорена:

$$\begin{aligned} x^p \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) &= x^p \frac{\sin x - x}{x \sin x} = x^p \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)} = \\ &= \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^{-p} \left(x^2 + o(x^2)\right)} = O\left(\frac{1}{x^{-p-1}}\right). \end{aligned}$$

Значит, интеграл сходится при $-p - 1 < 1$, т.е. при $p > -2$.

г) На промежутке интегрирования имеется единственная точка $x = 0$, которая при $p > 0$ является особой точкой 2-го рода. Выясним, при каких значениях параметра p интеграл сходится. Для этого найдём разложение подынтегральной функции $f(x)$ в окрестности особой точки по формуле Маклорена:

$$f(x) = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right)}{x^p} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^{p-4}}\right).$$

Таким образом, при $x \rightarrow +0$ подынтегральная функция имеет порядок роста, равный $p-4$, по сравнению с бесконечно большой функцией $\frac{1}{x}$. По

3-му признаку сравнения для интегралов 2-го рода получаем, что интеграл сходится при $p-4 < 1$, т.е. $p < 5$, и расходится в остальных случаях.

13. *Решение.* а) 1) Пусть $a \neq 0$, $n > 0$. Воспользуемся признаком Дирихле. Функция $f(x) = \cos(ax)$ интегрируема на любом конечном промежутке $[0, A]$, где $A > 0$, причём $\forall A > 0$ первообразная этой функции ограничена числом

$$\left| \frac{2}{a} : \int_0^A \cos(ax) dx \right| \leq \left| \int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax dx \right| = \left| \frac{2}{a} \right|.$$

Кроме того, функция $g(x) = \frac{1}{1+x^n} \rightarrow 0$ монотонно убывая при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому, согласно признаку Дирихле, получаем, что интеграл сходится.

2) Пусть теперь $a = 0$, тогда исходный интеграл принимает вид $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$. При любом $n > 0$ единственная особая точка $x = +\infty$. Так как

$$\frac{1}{1+x^n} = O\left(\frac{1}{x^n}\right), \text{ то по 3-му признаку сравнения интеграл сходится тогда и}$$

только тогда, когда $n > 1$.

3) Наконец, если $n = 0$, то интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(x) dx, \text{ где } f(x) = \begin{cases} \cos(ax), & x > 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases} \text{ расходится.}$$

б) Воспользуемся признаком Дирихле. Функция $f(x) = \sin x$ интегрируема в любом конечном промежутке $[0, A]$, где $A > 0$, причём $\forall A > 0$ первообразная этой функции ограничена числом 2:

$$\left| \int_a^A \sin x dx \right| \leq \left| \int_0^\pi \sin x dx \right| = 2.$$

При $p > 0$ и $x \rightarrow +\infty$ функция $g(x) = \frac{1}{x^p} \rightarrow 0$, монотонно убывая. Поэтому, согласно признаку Дирихле, интеграл сходится.

в) Положим $t = x^2$, тогда $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, и изменению x от 0 до $+\infty$ отвечает монотонное изменение t также от 0 до $+\infty$: $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$.

Так как $\forall A \geq 0$ интеграл по любому конечному сегменту $[0, A]$ от функции $f(t) = \cos t$ ограничен: $\left| \int_0^A \cos t dt \right| = |\sin A - \sin 0| \leq 1$, а функция

$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow +\infty$, то, по признаку Дирихле, интеграл сходится.

г) Заметим, что $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится по 3-му признаку сравнения, а функция

$\arccos \frac{1}{x^2}$ монотонно возрастает при $x \rightarrow +\infty$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и ограничена:

$$\left| \arccos \frac{1}{x^2} \right| \leq \pi \quad \forall x \geq 1. \text{ Поэтому, по признаку Абеля, данный интеграл}$$

сходится.

14. *Доказательство:* см. пример 1 раздела 4.3.

15. *Решение.* а) Разобьём данный интеграл на два интеграла так, чтобы в каждом из получившихся интегралов было по одной особой точке ($A > 0$ – любое число):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + I_2.$$

Исследуем сходимость интегралов I_1 и I_2 .

1) Поскольку функция $\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на $(0, A]$ и ограничена, то интеграл I_1 существует как собственный (в точке $x = 0$ функцию можно доопределить предельным значением, равным 1, до непрерывной на сегменте $[0, A]$).

2) Интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле (см. задачу 13(б) выше). Поэтому исходный интеграл сходится.

б) Аналогично имеем:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

1) При $x \rightarrow +0$ имеем: $\sin x \sim x$, поэтому $\frac{\sin x}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$, и по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится (в том числе абсолютно) при $p-1 < 1$, т.е. $p < 2$, а при остальных p расходится.

2) Пусть $x \rightarrow +\infty$. При $p > 0$ интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле (см. задачу 13(б) выше). При $p \leq 0$ интеграл I_2 расходится по критерию Коши (см. задачу 14 выше).

Таким образом, исходный интеграл сходится при $0 < p < 2$, и расходится в противном случае.

16. Решение. а) 1-й способ. На промежутке интегрирования имеются две точки, которые в зависимости от значений параметров могут быть особыми: $x = 1$ (2-го рода) и $x = +\infty$ (1-го рода). Разобьём интеграл на сумму двух интегралов

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_1^A \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = I_1 + I_2$$

и исследуем сходимость каждого из них.

1) Для исследования сходимости интеграла I_2 (в окрестности бесконечно удалённой точки) воспользуемся 2-м признаком сравнения.

Покажем, что при $p > 1$ интеграл I_2 сходится. Для этого сравним при $x \rightarrow +\infty$ скорости убывания двух бесконечно малых функций $f(x) = \frac{1}{x^p \ln^q x}$ и $g(x) = \frac{1}{x^k}$, где $k > 1$ – любое число (интеграл

$\int_A^{+\infty} g(x) dx$ сходится). Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x^p \ln^q x)}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{-q} x}{x^{p-k}}.$$

Заметим, что если $p - k > 0$, т.е. $p > k$, то при любых q данный предел равен 0 (поскольку степенная функция x^{p-k} в знаменателе дроби при $x \rightarrow +\infty$ растёт быстрее логарифмической функции в числителе дроби). Итак, при $p > k > 1$, т.е. при $p > 1$, согласно 2-му признаку сравнения, интеграл

$\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ сходится.

Покажем теперь, что при $p < 1$ интеграл I_2 расходится. Сравним при $x \rightarrow +\infty$ подынтегральную функцию $\frac{1}{x^p \ln^q x}$ с функцией $g(x) = \frac{1}{x^k}$, где $k \leq 1$ – любое число (интеграл $\int_A^{+\infty} g(x) dx$ расходится). Рассмотрим всё тот же предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{-q} x}{x^{p-k}}.$$

При $p - k < 0$, т.е. $p < k$, и любом q этот предел равен $+\infty$. Согласно 2-му признаку сравнения, из расходимости интеграла $\int_A^{+\infty} g(x) dx$ следует расходимость I_2 .

Пусть теперь $p = 1$, $q > 1$, тогда

$$I_2 = \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \int_A^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^q x} = \left. \frac{\ln^{1-q} x}{1-q} \right|_A^{+\infty} - \text{сходится.}$$

Если же $p = 1$, $q = 1$, то

$$I_2 = \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_A^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_A^{+\infty} - \text{расходится.}$$

При $p = 1$, $q < 1$ имеем

$$I_2 = \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \left. \frac{\ln^{1-q} x}{1-q} \right|_A^{+\infty} - \text{расходится.}$$

2) При $x \rightarrow +1$ имеем: $\ln x = \ln(1 + (x-1)) \sim x-1$, и поэтому $\frac{1}{x^p \ln^q x} = O\left(\frac{1}{(x-1)^q}\right)$. По 3-му признаку сравнения интеграл (при любом p) сходится тогда и только тогда, когда $q < 1$.

Итак, интеграл сходится, если $p > 1$ и $q < 1$ (и расходится в остальных случаях).

2-й способ. Сделаем в исходном интеграле замену $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$ и

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt = \int_0^A \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt + \int_A^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt = I_1 + I_2.$$

1) При $t \rightarrow +0$ имеем: $\frac{e^{(1-p)t}}{t^q} = O\left(\frac{1}{t^q}\right)$, следовательно, интеграл I_1 сходится по 3-му признаку сравнения при $q < 1$ (при любом $p \in \mathbb{R}$) и расходится при $q \geq 1$.

2) При $t \rightarrow +\infty$ и $p > 1$ функция $e^{(1-p)t}$ убывает быстрее, чем любая функция вида $\frac{1}{t^k}$, $k > 1$. Поэтому, по 2-му признаку сравнения, из сходимости интеграла $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^k}$ следует сходимость интеграла I_2 .

При $t \rightarrow +\infty$ и $p < 1$ функция $e^{(1-p)t}$ растёт быстрее, чем любая функция вида $\frac{1}{t^k}$, $k \leq 1$. Поэтому, по 2-му признаку сравнения, из расходимости интеграла $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^k}$ следует расходимость интеграла I_2 .

При $t \rightarrow +\infty$ и $p = 1$ интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt$ принимает вид $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$ и, очевидно, расходится.

Ответ: интеграл сходится, если $p > 1$ и $q < 1$ (и расходится в остальных случаях).

б) В этом интеграле две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Согласно свойству аддитивности, разобьём интеграл на сумму двух интегралов, в каждом из которых останется по одной особой точке:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx = \int_0^A \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx = I_1 + I_2.$$

Интеграл I сходится, когда одновременно сходятся оба интеграла I_1 и I_2 .

1) Исследуем сходимость интеграла I_1 . При $x \rightarrow +0$ имеем: $\ln(1+x) \sim x$, поэтому

$$\frac{\ln(1+x)}{x^n} = O\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

По 3-му признаку сравнения, интеграл I_1 сходится тогда и только тогда, когда $n-1 < 1$, т.е. $n < 2$.

2) Исследуем сходимость интеграла I_2 . При $x \rightarrow +\infty$ сравним скорости убывания (порядки малости) двух бесконечно малых функций

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^n} \text{ и } g(x) = \frac{1}{x^k}.$$

Выясним, при каких значениях параметра n интеграл I_2 сходится. Пусть k – любое число, большее 1 (интеграл $\int_A^{+\infty} g(x) dx$ сходится). Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)/x^n}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{n-k}}.$$

Согласно 2-му признаку сравнения, если этот предел равен 0, то интеграл I_2 сходится. Заметим, что при $n-k > 0$, т.е. $n > k$, данный предел обращается в нуль (поскольку степенная функция x^{n-k} в знаменателе дроби при $x \rightarrow +\infty$ растёт быстрее логарифмической функции в числителе дроби). Итак, при $n > k > 1$, т.е. при $n > 1$, интеграл I_2 сходится.

Исследуем интеграл I_2 на сходимость при $n \leq 1$. Сравним при $x \rightarrow +\infty$ подынтегральную функцию $f(x)$ с функцией $g(x) = \frac{1}{x^k}$, где

$k \leq 1$ – любое число (интеграл $\int_A^{+\infty} g(x)dx$ расходится). Рассмотрим тот же предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{n-k}}.$$

Очевидно, что при $n-k \leq 0$, т.е. $n \leq k(\leq 1)$, т.е. при $n \leq 1$, этот предел равен $+\infty$. Согласно 2-му признаку сравнения, из расходимости интеграла

$$\int_A^{+\infty} g(x)dx \text{ следует расходимость } I_2.$$

Ответ: интеграл сходится при $1 < n < 2$, и расходится в противном случае.

в) Покажем, что подынтегральная функция ограничена в окрестности точки $x = 1$ (т.е. эта точка не является особой):

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(\ln x)'}{(1-x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1/x}{-2x} = -\frac{1}{2}.$$

Исследуем сходимость интеграла при $x \rightarrow +0$. Рассмотрим предел отношения

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x / (1-x^2)}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1-x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-k}}.$$

При $k > 0$ последний из пределов является неопределённостью вида $\frac{\infty}{\infty}$, раскрывая которую по правилу Лопиталя, получим:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-k}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-kx^{-k-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^k}{-k} = 0.$$

Итак, подынтегральная функция в окрестности точки $x = 0$ имеет порядок роста ниже, чем бесконечно большая в этой окрестности функция $\frac{1}{x^k}$, интеграл от которой сходится при $k < 1$. По 2-му признаку сравнения, из сходимости интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ ($0 < k < 1$) следует сходимость исходного интеграла.

17. Решение. а) При $x \rightarrow +0$ имеем: $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = O\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)$, и поэтому

интеграл сходится, по 3-му признаку сравнения, тогда и только тогда, когда $-n < 1$, т.е. при $n > -1$.

При $x \rightarrow 1-0$ имеем: $\sqrt{1-x^4} = \sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)(1+x^2)} \sim \sqrt{1-x}$. По-

этому $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = O\left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\right)$, и так как $1/2 < 1$, то в окрестности точки

$x = 1$ интеграл также сходится (при любом n).

Итак, интеграл сходится при $n > -1$.

б) Разобьём интеграл на сумму двух интегралов:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^A x^{p-1} e^{-x} dx + \int_A^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = I_1 + I_2 \quad (A > 0).$$

Исследуем сходимость каждого из интегралов I_1 и I_2 .

1) При $x \rightarrow +0$ имеем: $e^{-x} \rightarrow 1$ и поэтому $f(x) = x^{p-1} e^{-x} = O\left(\frac{1}{x^{1-p}}\right)$. По 3-му признаку сравнения несобственный интеграл 2-го рода

I_1 сходится тогда и только тогда, когда $1-p < 1$, т.е. $p > 0$ (и расходится при остальных значениях p).

2) Для исследования сходимости несобственного интеграла 1-го рода I_2 воспользуемся 2-м признаком сравнения.

Для этого при $x \rightarrow +\infty$ сравним порядки малости двух бесконечно малых функций $f(x)$ и $g(x) = \frac{1}{x^k}$, где $k > 1$ (интеграл $\int_A^{+\infty} g(x)dx$ сходится).

Рассмотрим предел отношения этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p-1} e^{-x}}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-p-k+1}} = 0$$

при любых p , поскольку экспоненциальная функция на бесконечности убывает быстрее любой степенной функции. Согласно 2-му признаку сравнения,

в этом случае из сходимости интеграла $\int_A^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость инте-

$$\text{грала } \int_A^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Окончательно, исходный интеграл $\Gamma(p)$ сходится, если (и только если) одновременно сходятся интегралы I_1 и I_2 , т.е. при $p > 0$.

в) Имеем две точки, являющиеся или могущие быть особыми при определённых значениях параметров: $x = 0$ и $x = +\infty$. Разобьём интеграл на два интеграла ($A > 0$):

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctg x}{2+x^n} dx = \int_0^A \frac{x^m \arctg x}{2+x^n} dx + \int_A^{+\infty} \frac{x^m \arctg x}{2+x^n} dx = I_1 + I_2.$$

1) При $x \rightarrow +0$ имеем: $\arctg x \sim x$, поэтому $\frac{x^m \arctg x}{2+x^n} = O\left(\frac{1}{x^{-m-1}}\right)$, и

по 3-му признаку сравнения интеграл I_1 сходится тогда и только тогда, когда $-m-1 < 1$, т.е. $m > -2$.

2) При $x \rightarrow +\infty$ имеем: $\arctg x \sim \frac{\pi}{2}$, $2+x^n \sim x^n$, и поэтому $\frac{x^m \arctg x}{2+x^n} = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$. Значит, по 3-му признаку сравнения интеграл I_2

сходится тогда и только тогда, когда $n-m > 1$.

Следовательно, исходный интеграл сходится, когда одновременно сходятся I_1 и I_2 , т.е. при $-2 < m < n-1$ (и расходится в остальных случаях).

г) Получим разложение подынтегральной функции по степеням x при $x \rightarrow +0$:

$$\begin{aligned} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^p} &= \frac{1-e^{\sin x \ln(\cos x)}}{x^p} = \\ &= \frac{1-(1+\sin x \ln(\cos x)+o(\sin x \ln(\cos x)))}{x^p}. \end{aligned}$$

Так как $\ln(\cos x) = \frac{1}{2} \ln(\cos^2 x) = \frac{1}{2} \ln(1-\sin^2 x)$, то при $x \rightarrow +0$

$$\ln(\cos x) \sim -\frac{1}{2} \sin^2 x \sim -\frac{1}{2} x^2,$$

тогда упростим: $o(\sin x \ln(\cos x)) = o(\sin^3 x) = o(x^3)$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^p} &= \frac{-\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(x^3)}{x^p} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^{p-3}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл сходится при условии $p-3 < 1$, т.е. при $p < 4$.

д) На промежутке интегрирования имеются три точки, которые в зависимости от значений параметров, могут быть особыми: $x = 0$, $x = 1$ и $x = +\infty$. Исследуем сходимость интеграла в окрестности каждой из них.

1) При $x \rightarrow +0$ оценим порядок роста подынтегральной функции:

$$x^\alpha |x-1|^\beta = O\left(\frac{1}{x^{-\alpha}}\right).$$

2) При $x \rightarrow 1$ имеем: $x^\alpha |x-1|^\beta = O\left(\frac{1}{|x-1|^{-\beta}}\right)$.

3) При $x \rightarrow +\infty$ имеем: $x^\alpha |x-1|^\beta = O\left(\frac{1}{x^{-\alpha-\beta}}\right)$.

Согласно 3-му признаку сравнения, для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия: $-\alpha < 1$, $-\beta < 1$, $-\alpha - \beta > 1$.

Итак, интеграл сходится $\Leftrightarrow \alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta < -1$.

18. Доказательство.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = I_1 + I_2.$$

В каждом из интегралов сделаем замену переменной $t = x - \frac{1}{x}$. Имеем

$$x = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} \text{ при } x > 0 \text{ (в интеграле } I_1) \text{ и } x = \frac{t - \sqrt{t^2 + 4}}{2} \text{ при } x < 0$$

(в интеграле I_2). Таким образом,

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}\right) dt, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}\right) dt.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}\right) dt$ сходится, если сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ (по

признаку Абеля). Отсюда получаем, что интегралы I_1 и I_2 сходятся и, кроме

того, $I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$

19. Ответ: сходится. 20. Ответ: расходится.
 21. Ответ: расходится. 22. Ответ: расходится при любом α .
 23. Ответ: сходится. 24. Ответ: расходится.
 25. Ответ: расходится при любом n .
 26. Ответ: сходится (абсолютно) при $n > 1$, расходится при $n \leq 1$.
 27. Ответ: сходится при любом n . 28. Ответ: расходится.
 29. Решение. а) 1) Исследуем интеграл на сходимость.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \int_0^A \frac{\cos x}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

При $x \rightarrow +0$ имеем: $\frac{\cos x}{x^p} = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$, и, по 3-му признаку сравнения,

интеграл I_1 сходится (в том числе абсолютно) при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Пусть $x \rightarrow +\infty$. При $p > 0$ интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле (так как $\forall B \geq A \quad \left| \int_A^B \cos x dx \right| = |\sin B - \sin A| \leq 2$, а функция $\frac{1}{x^p} \rightarrow 0$ монотонно при $x \rightarrow +\infty$). При $p \leq 0$ интеграл I_2 расходится (по критерию Коши). Поэтому интеграл I сходится при $0 < p < 1$ и расходится в остальных случаях.

2) Исследуем интеграл на абсолютную сходимость (при $0 < p < 1$).

Представим интеграл $\bar{I} = \int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^p} dx$ в виде суммы двух ин-

тегралов:

$$\bar{I} = \int_0^A \frac{|\cos x|}{x^p} dx + \int_A^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^p} dx = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Как было показано выше, интеграл $\bar{I}_1$ сходится. Исследуем сходимость $\bar{I}_2$.

Так как $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 x \leq |\cos x| \leq 1$, то для интеграла $\bar{I}_2$ имеем оценки:

$$\frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} J_2 = \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p} + \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx = \int_A^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^p} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^p} dx.$$

При $p < 1$ интеграл J_1 расходится (по 3-му признаку), а интеграл J_2 сходится (по признаку Дирихле). Поэтому сумма этих интегралов есть расходящийся интеграл, но тогда интеграл $\bar{I}_2$, мажорирующий расходящийся, также расходится.

Итак, при $0 < p < 1$ интеграл сходится условно, а при $p \leq 0$ и $p \geq 1$ – расходится.

б) Сделаем замену $t = e^x$, тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$ и получим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos t dt.$$

1) Исследуем интеграл на сходимость в окрестности единственной особой точки $t = +\infty$. При $t \rightarrow +\infty$ интеграл сходится по признаку Дирихле

(поскольку $\forall A \geq 1 \quad \left| \int_1^A \cos t dt \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2$, а функция $\frac{\ln^2 t}{t} \rightarrow 0$

монотонно при $t \rightarrow +\infty$. Докажем монотонность: $\left(\frac{\ln^2 t}{t} \right)' =$

$$= \frac{\ln t(2 - \ln t)}{t^2} < 0 \text{ при достаточно больших } t).$$

2) Исследуем интеграл на абсолютную сходимость.

Рассмотрим $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} |\cos t| dt$. Так как

$$\frac{1}{2} \frac{\ln^2 t}{t} + \frac{1}{2} \cos 2t \frac{\ln^2 t}{t} = \cos^2 t \frac{\ln^2 t}{t} \leq |\cos t| \frac{\ln^2 t}{t}, \text{ то}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \cos 2t \frac{\ln^2 t}{t} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} |\cos t| dt.$$

Так как $\frac{\ln^2 t}{t} > \frac{1}{t}$ при $t > e$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt$ расходится ($+\infty$),

а интеграл $\int_1^{+\infty} \cos 2t \frac{\ln^2 t}{t} dt$ сходится по признаку Дирихле, поэтому их сумма расходится, а значит, исследуемый интеграл абсолютно расходится.

Ответ: интеграл сходится условно.

в) Разобьём интеграл на два интеграла:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx = \int_0^A \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx + \int_A^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx = I_1 + I_2.$$

1) Исследуем интеграл на сходимость.

При $x \rightarrow +0$ имеем: $\sin x \sim x$, $1+x^q \sim 1$, поэтому

$$\frac{x^p \sin x}{1+x^q} = O\left(\frac{1}{x^{-p-1}}\right),$$

и, по 3-му признаку сравнения, интеграл I_1 сходится (в том числе абсолютно) при $-p-1 < 1$, т.е. $p > -2$, и расходится при $-p-1 \geq 1$, т.е. $p \leq -2$.

Пусть $x \rightarrow +\infty$ и $p < q$ $\frac{x^p}{1+x^q} \rightarrow 0$ монотонно, следовательно, интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле (при $p \geq q$ интеграл I_2 расходится по критерию Коши).

Поэтому интеграл I сходится при $-2 < p < q$ (и расходится в остальных случаях).

2) Исследуем интеграл на абсолютную сходимость (при тех значениях p, q , при которых он сходится, т.е. при $-2 < p < q$). Представим интеграл

$$\bar{I} = \int_0^{+\infty} \left| \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$$

в виде суммы двух интегралов:

$$\bar{I} = \int_0^A \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx + \int_A^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Как было показано выше, при указанных значениях параметров интеграл $\bar{I}_1$ сходится.

Исследуем сходимость $\bar{I}_2$. Так как $\frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x \leq |\sin x| \leq 1$, то для интеграла $\bar{I}_2$ имеем оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} J_2 &= \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{x^p dx}{1+x^q} - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{x^p \cos 2x}{1+x^q} dx = \\ &= \int_A^{+\infty} \frac{x^p \sin^2 x}{1+x^q} dx \leq \bar{I}_2 \leq \int_A^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx = J_1. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow +\infty$ $\frac{x^p}{1+x^q} = O\left(\frac{1}{x^{q-p}}\right)$, следовательно, при $q-p > 1$ интеграл J_1 сходится (по 3-му признаку), а значит, сходится и мажорируемый им интеграл $\bar{I}_2$ (т.е. интеграл I_2 сходится абсолютно). С другой стороны, при $q-p \leq 1$ интеграл J_1 расходится, а интеграл J_2 сходится (по признаку Дирихле). Поэтому сумма этих интегралов есть расходящийся интеграл, но тогда интеграл $\bar{I}_2$, мажорирующий расходящийся, также расходится. Значит, при $q-p \leq 1$ интеграл I_2 абсолютно расходится.

Итак, при $-2 < p < q-1$ интеграл сходится абсолютно, при $-2 < p < q \leq p+1$ интеграл сходится условно (в остальных случаях – расходится).

г) 1) Исследуем интеграл на сходимость. Сделаем замену $t = x^2$:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{\ln x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot 2\sqrt{t}} dt.$$

Имеем две особые точки: $t = 1$ и $t = +\infty$. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot 2\sqrt{t}} dt = \int_1^A \frac{\cos t}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot 2\sqrt{t}} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot 2\sqrt{t}} dt = I_1 + I_2.$$

При $t \rightarrow 1+0$ $f(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln t}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$, и так как $p = \frac{1}{2} < 1$,

то интеграл I_1 сходится (абсолютно) по 3-му признаку сравнения.

При $t \rightarrow +\infty$ воспользуемся признаком Дирихле. Так как $\left| \int_1^A \cos t dt \right| \leq 2$

$\forall A \geq 1$ и $\frac{1}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot 2\sqrt{t}} \rightarrow 0$ монотонно, то интеграл I_2 сходится. Итак,

интеграл I , как сумма двух сходящихся интегралов, сходится.

2) *Исследуем интеграл на абсолютную сходимость.* Рассмотрим интеграл

$$\bar{I} = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} dt = \int_1^A \frac{|\cos t|}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\cos t|}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} dt = \bar{I}_1 + \bar{I}_2.$$

Сходимость интеграла $\bar{I}_1$ была доказана выше. Для исследования сходимости интеграла $\bar{I}_2$ воспользуемся неравенством:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} + \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} dt &= \int_A^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} dt \leq \\ &\leq \int_A^{+\infty} \frac{|\cos t|}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

Так как интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} dt$ сходится (по Дирихле), а интеграл

$$\int_A^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\ln \sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} \geq \int_A^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{t}} - \text{расходится, то их сумма расходится. Следова-}$$

тельно, абсолютной сходимости нет.

Ответ: интеграл сходится условно.

$$30. \text{ Решение. а) Сделаем замену } t = \frac{1}{x}: I = \int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-p}} dt.$$

Единственная особая точка $+\infty$.

1) *Исследуем сходимость интеграла.* Для исследования на сходимость при $t \rightarrow +\infty$ воспользуемся признаком Дирихле. Так как

$$\left| \int_1^A \cos x dx \right| \leq 2 \quad \forall A \geq 1, \text{ и при } 2-p > 0 \quad \frac{1}{t^{2-p}} \rightarrow 0 \text{ монотонно, то инте-}$$

грал I сходится при $p < 2$.

2) *Исследуем интеграл на абсолютную сходимость.* Для этого исследуем сходимость интеграла $\bar{I} = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^{2-p}} dt$:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \left(\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-p}} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^{2-p}} dt \right) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^{2-p}} dt \leq \bar{I} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-p}} = I_1.$$

Выясним, когда интеграл $\bar{I}$ сходится. Так как $\bar{I} \leq I_1$, то из сходимости I_1 следует сходимость $\bar{I}$, т.е. абсолютная сходимость I . Но интеграл I_1 сходится при $2-p > 1$, т.е. $p < 1$ (по 3-му признаку сравнения), поэтому при этих значениях p исходный интеграл сходится абсолютно.

Выясним, когда сумма интегралов $I_1 + I_2$ расходится. Так как $I_1 + I_2 \leq \bar{I}$, то из расходимости $I_1 + I_2$ следует расходимость $\bar{I}$, т.е. интеграл I будет абсолютно расходиться, и, следовательно, в этом случае речь может идти только об условной сходимости I . При $1 \leq p < 2$ интеграл I_1 расходится, а интеграл I_2 сходится (по признаку Дирихле), поэтому их сумма расходится. Используя критерий Коши сходимости несобственных интегралов, можно доказать, что при $p \geq 2$ интеграл I расходится.

Ответ: при $p < 1$ интеграл сходится абсолютно;

при $1 \leq p < 2$ – сходится условно;

при $p \geq 2$ – расходится.

$$\text{б) Сделаем замену } t = \frac{1}{1-x}: I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(2t-1)^p t^{2(1-p)}} dt.$$

Особая точка: $t = +\infty$.

1) *Исследуем сходимость интеграла.* При $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$\frac{1}{(2t-1)^p t^{2(1-p)}} = O\left(\frac{1}{t^{2-p}}\right).$$

Так как $\left| \int_1^A \cos t dt \right| \leq 2 \quad \forall A \geq 1$, и при $2-p > 0 \quad \frac{1}{t^{2-p}} \rightarrow 0$ монотонно, то интеграл I сходится при $p < 2$ (а по критерию Коши расходится при $p \geq 2$).

2) *Исследуем интеграл на абсолютную сходимость.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{(2t-1)^p t^{2(1-p)}} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{(2t-1)^p t^{2(1-p)}} dt \leq \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{(2t-1)^p t^{2(1-p)}} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(2t-1)^p t^{2(1-p)}} = I_1. \end{aligned}$$

Так как интеграл I_1 сходится при $p < 1$, то при этих значениях p интеграл I сходится абсолютно. С другой стороны, при $p \geq 1$ интеграл I_1 расходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{(2t-1)^p t^{2(1-p)}} dt$ сходится (по признаку Дирихле), поэтому их сумма расходится, а значит, интеграл I абсолютно расходится.

Ответ: при $p < 1$ интеграл сходится абсолютно;

при $1 \leq p < 2$ – сходится условно;

при $p \geq 2$ – расходится.

в) Имеем две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx = \int_0^A \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx + \\ &+ \int_A^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

1) Исследуем интеграл на сходимость. При $x \rightarrow 0+0$ имеем

$$\frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} = O\left(\frac{1}{x^{-(q+1)}}\right),$$

значит, по 3-му признаку сравнения, интеграл I_1 сходится (в том числе абсолютно) при $-(q+1) < 1$, т.е. $q > -2$ и любых p (и расходится при $q \leq -2$ и любых p).

При $x \rightarrow +\infty$ воспользуемся признаком Дирихле. Так как

$$\left| \int_A^B \sin x dx \right| \leq 2 \quad \forall B \geq A \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} = O\left(\frac{1}{x^{\frac{p}{2}}}\right),$$

причём при $p > 0$ $\frac{1}{x^{\frac{p}{2}}} \rightarrow 0$ монотонно, то интеграл I_2 сходится (по критерию Коши доказывается, что при $p \leq 0$ интеграл I_2 расходится).

Итак, при $p > 0$, $q > -2$ интеграл I , как сумма двух сходящихся интегралов, сходится; в остальных случаях – расходится.

2) Исследуем интеграл на абсолютную сходимость (при $p > 0$, $q > -2$). Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x| \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx = \int_0^A \frac{|\sin x| \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx + \int_A^{+\infty} \frac{|\sin x| \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx = \\ &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2. \end{aligned}$$

Сходимость интеграла $\bar{I}_1$ при указанных p и q была доказана выше. Для исследования сходимости интеграла $\bar{I}_2$ воспользуемся неравенством:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx &= \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx \leq \bar{I}_2 \leq \\ &\leq \int_A^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx = J_1. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow +\infty$ $\frac{\operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} = O\left(\frac{1}{x^{\frac{p}{2}}}\right)$, следовательно, при $\frac{p}{2} > 1$ интеграл

J_1 сходится (по 3-му признаку), а значит, сходится и мажорируемый им интеграл $\bar{I}_2$ (т.е. интеграл I_2 сходится абсолютно). С другой стороны, при

$0 < \frac{p}{2} \leq 1$ интеграл J_1 расходится, а интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{\cos 2x \cdot \operatorname{arctg}^q x}{1+x^{\frac{p}{2}}} dx$ схо-

дится (по признаку Дирихле). Поэтому разность этих интегралов есть расходящийся интеграл, но тогда интеграл $\bar{I}_2$, мажорирующий расходящийся, также расходится. Значит, при $0 < \frac{p}{2} \leq 1$ интеграл I_2 абсолютно расходится.

Ответ: при $p > 2$, $q > -2$ интеграл сходится абсолютно;

при $0 < p \leq 2$, $q > -2$ интеграл сходится условно;

при $p \leq 0$ или $q \leq -2$ – расходится.

г) Сделаем замену $t = x + x^2$, тогда $x^2 + x - t = 0$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$. Так как $x > 0$, то $x = \frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1+4t}}$ и

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}}.$$

Особые точки: $t = 0$ и $t = +\infty$. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$I = \int_0^A \frac{\sin t dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} + \int_A^{+\infty} \frac{\sin t dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} = I_1 + I_2.$$

1) Исследуем интеграл на сходимость. При $t \rightarrow 0+0$ имеем: $\sin t \sim t$, $\sqrt{1+4t} \sim 1+2t$, поэтому

$$\frac{\sin t}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} = O\left(\frac{1}{t^{p-1}}\right).$$

Следовательно, по 3-му признаку сравнения, интеграл I_1 сходится (причём абсолютно) при $p-1 < 1$, т.е. $p < 2$, и расходится при $p \geq 2$.

При $t \rightarrow +\infty$ воспользуемся признаком Дирихле. Так как

$$\left| \int_A^B \sin t dt \right| \leq 2 \quad \forall B \geq A \text{ и } \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}\right),$$

причём при $\frac{p+1}{2} > 0$, т.е. $p > -1$, $\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}} \rightarrow 0$ монотонно, то интеграл I_2

сходится (по критерию Коши можно доказать, что при $\frac{p+1}{2} \leq 0$, т.е. $p \leq -1$, интеграл I_2 расходится).

Итак, интеграл I сходится при $-1 < p < 2$ как сумма двух сходящихся интегралов; в остальных случаях – расходится.

2) Исследуем интеграл на абсолютную сходимость (при $-1 < p < 2$). Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t| dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} = \int_0^A \frac{|\sin t| dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} + \\ &+ \int_A^{+\infty} \frac{|\sin t| dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2. \end{aligned}$$

Сходимость интеграла $\bar{I}_1$ при указанных p была доказана выше. Для исследования сходимости интеграла $\bar{I}_2$ воспользуемся неравенством:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos 2t dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} &= \int_A^{+\infty} \frac{\sin^2 t dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} \leq \bar{I}_2 \leq \\ &\leq \int_A^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} = J_1. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}\right),$$

следовательно, при $\frac{p+1}{2} > 1$, т.е. $1 < p < 2$, интеграл J_1 сходится (по 3-му признаку), а значит, сходится и мажорируемый им интеграл $\bar{I}_2$ (т.е. интеграл I_2 сходится абсолютно). С другой стороны, при $\frac{p+1}{2} \leq 1$, т.е. $-1 < p \leq 1$,

интеграл J_1 расходится, а интеграл $-\int_A^{+\infty} \frac{\cos 2tdt}{\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^p \sqrt{1+4t}}$ сходится

(по признаку Дирихле). Поэтому разность этих интегралов есть расходящийся интеграл, но тогда интеграл $\bar{I}_2$, мажорирующий расходящийся, также расходится. Значит, при $-1 < p \leq 1$ интеграл I_2 абсолютно расходится.

Ответ: при $1 < p < 2$ интеграл сходится абсолютно;

при $-1 < p \leq 1$ интеграл сходится условно;

при остальных p – расходится.

31. Решение. а) Особая точка $x=0$. Так как при $x \rightarrow +0$ $e^{\pm x} = 1 \pm x + o(x)$, то $\frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x(2x + o(x))}} = O\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right)$. Поскольку $\frac{2}{3} < 1$, то, 3-му признаку сравнения, интеграл сходится, причём абсолютно.

б) Особая точка $x = +\infty$. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}.$$

Первый интеграл сходится как собственный (причём абсолютно, так как подынтегральная функция неотрицательна).

1) Исследуем *сходимость* интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$. При $x \rightarrow +\infty$ функция $\frac{\sqrt{x}}{x+100} \rightarrow 0$ монотонно убывая (производная $\left(\frac{\sqrt{x}}{x+100}\right)' = \frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} < 0$ при $x > 100$). Кроме того, $\left|\int_1^B \cos x dx\right| \leq 2$

$\forall B \geq 1$. По признаку Дирихле интеграл сходится.

Итак, исходный интеграл сходится.

2) Исследуем интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$ на *абсолютную сходимость*:

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x+100} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx.$$

Так как при $x \rightarrow +\infty$ $\frac{\sqrt{x}}{x+100} = O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$, то, по 3-му признаку сравнения,

интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x+100}$ расходится. В то же время интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx$

сходится по признаку Дирихле. Их сумма есть расходящийся интеграл, следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$ расходится, а это значит, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx \text{ расходится абсолютно.}$$

Следовательно, исходный интеграл сходится условно.

в) Положим $t = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, тогда $\cos x = \frac{1}{t}$, $x = \arccos \frac{1}{t}$,

$$dx = \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}. \text{ В результате имеем:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}}.$$

Особые точки: $t=1$ и $t=+\infty$. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$I = \int_1^A \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} + \int_A^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} = I_1 + I_2.$$

При $t \rightarrow 1+0$ имеем:

$$\frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} = O\left(\frac{1}{(t-1)^{1/2}}\right).$$

Следовательно, по 3-му признаку сравнения, интеграл I_1 сходится (причём абсолютно).

При $t \rightarrow +\infty$ $\left| \frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} \right| \leq \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ – интеграл сходится абсолютно (по 1-му признаку сравнения). Итак, интеграл сходится абсолютно.

г) Так как $P_n(x) > 0$ при $x \geq a \geq 0$, то единственная особая точка $x = +\infty$.

1) *Исследуем сходимость интеграла.* Поскольку при $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right),$$

причём $\frac{1}{x^{n-m}} \rightarrow 0$ монотонно при $n-m > 0$, то, по признаку Дирихле, интеграл сходится (а по критерию Коши расходится при $n-m \leq 0$).

2) *Исследуем интеграл на абсолютную сходимость.* Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} \cos 2x dx &= \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} \sin^2 x dx \leq \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} |\sin x| dx \leq \\ &\leq \int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} dx = J_1, \end{aligned}$$

и при $x \rightarrow +\infty$ $\frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, то для абсолютной сходимости интеграла достаточно потребовать, чтобы $n-m > 1$, т.е. $n > m+1$. При $m < n \leq m+1$ интеграл J_1 расходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} \cos 2x dx$ сходится (по признаку Дирихле), поэтому исходный интеграл абсолютно расходится.

Ответ: при $n > m+1$ интеграл сходится абсолютно;

при $m < n \leq m+1$ сходится условно

(в остальных случаях – расходится).

§5.

1. 4,5 кв.ед. 2. 18 кв.ед. 3. $2\sqrt{2}a$ кв.ед. 4. $1/3 + 2/\pi$ кв.ед.
5. $2 - \frac{10}{e^2}$ кв.ед. 6. 1 кв.ед. 7. $a\left(\frac{1}{3} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ кв.ед. 8. 46/15 кв.ед.
9. $a^2\left(\pi - 2 + \frac{4}{\pi}\ln 2\right)$ кв.ед. 10. $\sqrt{2} - 1$ кв.ед. 11. $\frac{3}{e}(e^3 - 4)$ кв.ед.
12. 2/15 кв.ед. 13. $(41/2)\arcsin(9/41) + 20\ln 0,8$ кв.ед.
14. $(9\pi/4) - \sqrt{2} + 4\sqrt{2}\ln 2 - (9/2)\arcsin(1/3)$ кв.ед. 15. $\pi/8$ кв.ед.
16. $4a^3/3$ кв.ед. 17. 8/15 кв.ед. 18. $8a^2/5$ кв.ед. 19. $\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})$ кв.ед.
20. $a^2/10$ кв.ед. 21. $a^2\left(\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2 + \sqrt{3})\right)$ кв.ед. 22. 7/12 кв.ед.
23. 43/12 кв.ед. 24. $6 - \frac{2}{\pi}$ кв.ед. 25. $S_1 = S_2 = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2a^2}{3}$ кв.ед.,
 $S_3 = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{4a^2}{3}$ кв.ед. 26. 8/3 кв.ед. 27. $72\sqrt{3}/5$ кв.ед.
28. 27/5 кв.ед. 29. 169π кв.ед. 30. $(a^2/3)(4\pi^3 + 3\pi)$ кв.ед.
31. $6\pi a^2$ кв.ед. 32. $8a^2/3$ кв.ед. 33. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ кв.ед. 34. 1/12 кв.ед.
35. $\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}(16 - 9\sqrt{3})$ кв.ед. 36. $a^2/6$ кв.ед. 37. $a^2/210$ кв.ед.
38. $a^2/60$ кв.ед. 39. $a^2/10$ кв.ед. 40. 11π кв.ед. 41. $16\pi^3/3$ кв.ед.
42. $8/\sqrt{3}$ кв.ед. 43. $(3/2)\pi a^2$ кв.ед. 44. $(3\pi - 8)/32$ кв.ед.
45. $\pi/3 + \sqrt{3}/2$ кв.ед. 46. $\pi a^2/4$ кв.ед. 47. $\pi a^2/4$ кв.ед.
48. $\pi a^2/4$ кв.ед. 49. $3\pi a^2/2$ кв.ед. 50. $9\pi a^2/2$ кв.ед.
51. $\frac{a^2}{8}(4 - \pi)$ кв.ед. 52. a^2 кв.ед. 53. $\frac{a^2}{2}(4 - \pi)$ кв.ед.
54. $19\pi a^2/8$ кв.ед. 55. $\pi(1 + \pi^2/6)$ кв.ед. 56. $(a^2/6)(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$ кв.ед.

57. $\pi a^2/4$ кв.ед. 58. $\frac{a^2(5\pi + 18\sqrt{3})}{32}$ кв.ед. 59. $\frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$ кв.ед.
60. $2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}$ кв.ед. 61. $\pi a^2/2$ кв.ед. 62. $\pi a^2/\sqrt{2}$ кв.ед.
63. $(a^2/2)(\pi - 2)$ кв.ед. 64. $\pi a^2/3 + a^2\sqrt{3}/2$ кв.ед. 65. $7\pi a^2/512$ кв.ед.
66. $\pi a^2/8$ кв.ед. 67. $\pi\sqrt{2}a^2$ кв.ед. 68. $4\pi a^2/3$ кв.ед. 69. $\pi a^2/2$ кв.ед.
70. $a^2(1 - \sqrt{2}/2)$ кв.ед. 71. $3a^2$ кв.ед. 72. $\pi a^2\left(\sqrt{2} - \frac{3}{8}\right)$ кв.ед.

§6.

1. $(5a/8)(2 - \ln(2 - \sqrt{3})/\sqrt{3})$. 2. $2a\sqrt{5} + a\ln(2 + \sqrt{5})$. 3. 12.
4. $10a$. 5. $\sqrt{2}(\pi - 1)$. 6. 5π . 7. $2\pi^2 a$. 8. $2(\sqrt{2} - 1)$.
9. $a \cos t_0 + a \ln \left| \frac{\cos t_0 - 1}{\cos t_0 + 1} \right|$, где $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. 10. $3a/2$.
11. $a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t_0}{2} \right|$, где $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. 12. 1/3. 13. $(ch^{3/2} 2a - 1)/2$.
14. $2ach^3 t_0 - 3acht_0 + a$, где $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. 15. $\sqrt{a^2 + c^2} \cdot t$.
16. $(27\sqrt{3} - 2\sqrt{6})/21$.
17. $\sqrt{h^2 + 4e^{4\pi}} - \sqrt{h^2 + 4} + h \ln \left(\frac{\sqrt{4e^{4\pi} + h^2} - h}{\sqrt{4 + h^2} - h} \right) - 2\pi$. 18. $10a$.
19. $8(10\sqrt{10} - 1)/27$. 20. $\sqrt{1 + e^{2a}} - \sqrt{2} + a - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2a}}}{1 + \sqrt{2}}$.
21. $27/20 + \ln 2$. 22. $(1/2)\ln 3$. 23. $\ln(\operatorname{tg}(\pi/4 + a/2))$. 24. $(1/2)\ln 3$.
25. $\ln(2 + \sqrt{3})$. 26. $\ln 3 - 1/2$. 27. $a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$. 28. $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$.
29. $2\sqrt{2}/3$. 30. $4\sqrt{2}/3$. 31. 2. 32. $(20/9)\sqrt{5/3}$. 33. $a \ln \frac{a}{b}$.
34. $7a/6$. 35. $14a/3$. 36. $\sqrt{1 + e^2} + e - 2 + 2\ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{1 + e^2} - 1)$.
37. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) + 2(10^{3/2} - 1)/27$. 38. 7/3. 39. 1. 40. 1.

41. $\pi a \sqrt{1+4\pi^2} + (a/2) \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.
 42. $\pi a \sqrt{1+4\pi^2} + (a/2) \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.
 43. $((\pi^2 + 4)\sqrt{\pi^2 + 4} - 8)/3$. 44. πa . 45. 8. 46. $a(2\pi + 3\sqrt{3})/8$.
 47. $3\pi a/2$. 48. $16a/3$. 49. $a(2\pi - \pi \theta)$. 50. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.
 $(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1)$. 51. $6\frac{1}{3}$. 52. $14/3$. 53. $3\sqrt{37} - \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{6 + \sqrt{37}}{2 + \sqrt{5}} \right|$.
 54. a . 55. $2a(1 - \sqrt{2}/2)$. 56. $a \left(\frac{\sin t_0}{2 \cos^2 \varphi_0} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right)$, где
 $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, $r_0 = r(t_0)$. 57. $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{2/3}} \cdot \ln \frac{b(\sqrt{a^2 + b^2} + b)}{a(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$.
 58. $28a/3$. 59. $4a(1 + \sqrt{3} \ln((1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}))$. 60. $2\sqrt{2}(5^{3/2} - 2^{3/2})/9$.

§7.

1. *Решение.* Проведём плоскость, перпендикулярную к высоте конуса на расстоянии x от плоскости верхнего основания конуса. В сечении получим эллипс с полуосями $z_1(x) = a + \frac{A-a}{h}x$ и $z_2(x) = b + \frac{B-b}{h}x$. Площадь

такого эллипса равна $S(x) = \pi \left(a + \frac{A-a}{h}x \right) \left(b + \frac{B-b}{h}x \right) =$

$$= \pi \left(ab + \frac{aB - 2ab + bA}{h}x + \frac{(A-a)(B-b)}{h^2}x^2 \right).$$

Тогда для объёма тела получаем $V = \int_0^h S(x) dx =$

$$= \pi \int_0^h \left(ab + \frac{aB - 2ab + bA}{h}x + \frac{AB - Ab - aB + ab}{h^2}x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{\pi h}{6} (B(a + 2A) + b(A + 2a)).$$

Ответ: $V = \frac{\pi h}{6} (B(a + 2A) + b(A + 2a))$ (куб.ед).

2. *Решение.* Найдём площадь $S(y)$ сечения параболоида плоскостью, перпендикулярной к оси Oy (очевидно, это круг). По условию, в основании параболоида лежит круг известной площади S . Обозначим радиус этого круга через R , тогда из равенства $\frac{H}{a} = R^2$ (умножением его на число π) находим: $\frac{\pi H}{a} = S$, откуда $a = \frac{\pi H}{S}$. Следовательно, $y = \frac{\pi H}{S} x^2$, откуда определяем $x^2 = \frac{Sy}{\pi H}$. Умножая теперь левую и правую части последнего равенства на π (при фиксированных x и y), получим площадь поперечного сечения параболоида как функцию переменной y : $S(y) = \frac{Sy}{H}$. Теперь уже легко вычислить искомый объём:

$$V = \int_0^H S(y) dy = \frac{S}{H} \int_0^H y dy = \frac{SH}{2} \text{ (куб.ед)}.$$

3. *Решение.* В сечении тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz , получим эллипс с полуосями a и z , следовательно, $S(z) = \pi az$. Тогда для объёма тела имеем

$$V = \int_0^a S(z) dz = \pi a \int_0^a z dz = \frac{\pi a^3}{2} \text{ (куб.ед)}.$$

4. *Решение.* Тело расположено в первом октанте. Оно ограничено частями координатных плоскостей и частью поверхности $z = \sqrt{1-x-y}$. В сечении тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz , получаем равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом длины $1 - z^2$, поэтому $S(z) = \frac{(1 - z^2)^2}{2}$. Тогда для величины объёма имеем

$$V = \int_0^1 S(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2z^2 + z^4) dz = \frac{4}{15} \text{ (куб.ед)}.$$

5. $4\pi R^3/3$ (куб.ед). 6. 72 (куб.ед). 7. $2a^2 h/3$ (куб.ед).

8. $\pi R^2 h/2$ (куб.ед).

9. Решение. Объём тела вращения находим по формуле (1):

$$V_{OX} = \pi \int_0^a y^2(x) dx = \frac{\pi b^2}{a^{\frac{4}{3}}} \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{3\pi b^2}{7a^{\frac{4}{3}}} x^{\frac{7}{3}} \Big|_0^a = \frac{3\pi a b^2}{7} \text{ (куб.ед.)}$$

10. Решение. а)

$$V_{OX} = \pi \int_0^{\pi} y^2(x) dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi^2}{2} \text{ (куб.ед.)}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } V_{OY} &= 2\pi \int_0^{\pi} xy(x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \\ &= 2\pi \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 2\pi^2 \text{ (куб.ед.)} \end{aligned}$$

$$\text{в) } \frac{\pi^2}{2} + 4\pi \text{ (куб.ед.)}; \text{ г) } \pi \left(4 - \frac{\pi}{2} \right) \text{ (куб.ед.)}; \text{ д) } 2\pi^2 + 4\pi \text{ (куб.ед.)}$$

11. а) $3\pi^2/2$ (куб.ед.); б) $\pi^2 - 2\pi$ (куб.ед.)

12. Решение. а) $V_{OX} = \pi \int_0^{+\infty} y^2(x) dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ (куб.ед.)

$$\text{б) } V_{OY} = 2\pi \int_0^{+\infty} xy(x) dx = 2\pi \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 2\pi \left(-x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right) = 2\pi$$

(куб.ед.). 13. 2π (куб.ед.). 14. а) $\pi(3 \ln^2 3 - 6 \ln 3 + 4)$ (куб.ед.);

б) $\pi(9 \ln 3 - 8)$ (куб.ед.). 15. 2π (куб.ед.). 16. $64\pi/15$ (куб.ед.).

17. $0,3\pi$ (куб.ед.). 18. $19,2\pi$ (куб.ед.). 19. $\pi(e^2 + 1)/4$ (куб.ед.).

20. $4\pi/35$ (куб.ед.). 21. πp^3 (куб.ед.). 22. а) $8\pi/15$ (куб.ед.);

б) $16\pi/105$ (куб.ед.). 23. $\pi a^3 \left(\frac{1}{2} sh^2 x + 1 \right)$ (куб.ед.). 24. $\pi a^2 h/2$

(куб.ед.). 25. а) $\frac{\pi}{4}(2 + \pi)$ (куб.ед.); б) $\pi \ln 2$ (куб.ед.);

в) $\frac{3\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$ (куб.ед.). 26. $16\pi(5\pi + 8)/5$ (куб.ед.). 27. а) $56\pi/15$

(куб.ед.); б) $8\pi/3$ (куб.ед.); в) $8\pi\sqrt{2}/15$ (куб.ед.). 28. 32π (куб.ед.).

29. $\frac{3\pi}{7} \left(2^7 - \frac{1}{3^7} \right)$ (куб.ед.). 30. $\pi/4$ (куб.ед.). 31. π (куб.ед.).

32. Решение. $V_{OX} = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = -\frac{16\pi}{x} \Big|_1^4 = 12\pi$ (куб.ед.). 33. $4\pi/15$

(куб.ед.). 34. $4\pi/15$ (куб.ед.). 35. $32\pi a^3/105$ (куб.ед.).

36. Решение. Фигура, которая вращается вокруг оси Ox , ограничена окружностью радиуса a с центром в точке $(0; b)$. Уравнением верхней полуокружности (расположенной выше прямой $y = b$) является

$$y_B = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ а нижней полуокружности, соответственно,}$$

$$y_H = b - \sqrt{a^2 - x^2}. \text{ Искомый объём равен}$$

$$V_{OX} = \pi \int_{-a}^a (y_B^2(x) - y_H^2(x)) dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Сделав тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, приходим к интегралу

$$V_{OX} = 8\pi a^2 b \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\pi^2 a^2 b \text{ (куб.ед.)}$$

37. Решение. $V_{OY} = \pi \int_{-2b}^{2b} a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \pi a^2 \left(y + \frac{y^3}{3b^2} \right) \Big|_{-2b}^{2b} =$

$$= \frac{28}{3} \pi a^2 b \text{ (куб.ед.)}$$

38. Решение. Объём эллипсоида вращения находим по формуле

$$V_{OY} = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2} \right) \Big|_{-b}^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b \text{ (куб.ед.)}$$

Замечание. При $a = b = R$ получаем $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ – объём шара.

39. Решение. Рассмотрим шар как результат вращения полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, вокруг оси Ox . Тогда

$$V_{Ox} = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (куб.ед.)}.$$

40. Решение. Рассмотрим конус как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках $(0;0)$, $(h;0)$ и $(h;R)$ вокруг оси Ox .

Тогда

$$V_{Ox} = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3} \text{ (куб.ед.)}.$$

41. Решение. Пусть тор получается вращением окружности $y = d \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно оси Ox . Тогда его объём V_{Ox} равен

$$\pi \int_{-R}^R (d + \sqrt{R^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-R}^R (d - \sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 4\pi d \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx =$$

$$= 4\pi d R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\pi^2 d R^2. \quad \text{Ответ: } V_{Ox} = 2\pi^2 d R^2 \text{ (куб.ед.)}.$$

$$42. 2\pi^2 a^2 b \text{ (куб.ед.)}.$$

$$43. \frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 - b^2} (2a^2 + b^2) - 2\pi a^2 b \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ (куб.ед.)};$$

$$\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 - b^2} (2a^2 + b^2) + \pi^2 a^2 b + 2\pi a^2 b \arcsin \frac{b}{a} \text{ (куб.ед.)}.$$

$$44. \text{ а) } \frac{16}{15} \pi a H^2 \text{ (куб.ед.)}; \text{ б) } \frac{\pi a^2 H}{2} \text{ (куб.ед.)}; \text{ в) } \frac{8}{5} \pi a H^2 \text{ (куб.ед.)}.$$

$$45. \frac{2\pi a^2 h (3b^2 - h^2)}{3b^2} \text{ (куб.ед.)}.$$

$$46. \text{ а) } \frac{\pi a^3}{2} (\pi - 2) \text{ (куб.ед.)}; \quad \text{ б) } \pi a^3 \sqrt{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ (куб.ед.)}.$$

$$47. \frac{4}{3} \pi a b^2 \text{ (куб.ед.)}. \quad 48. 8\pi \text{ (куб.ед.)}. \quad 49. 6\pi/7 \text{ (куб.ед.)}.$$

50. Решение. а) Данная кривая замкнута и симметрична относительно обеих координатных осей, причём при изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ величина x возрастает от 0 до a , а величина y , наоборот, убывает от b до 0.

Таким образом, при изменении t от 0 до 2π подвижная точка движется по кривой из точки $(0;b)$ в направлении движения часовой стрелки и пробегает всю кривую. Поэтому, учитывая симметрию кривой и формулы понижения степени (пример 5 раздела 3.3), в случае вращения вокруг оси Ox получаем следующий объём:

$$V_{Ox} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t) dx(t) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b \cos^3 t)^2 d(a \sin^3 t) =$$

$$= 6\pi a b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 t - \cos^9 t) dt = \frac{32\pi a b^2}{105} \text{ (куб.ед.)}.$$

$$\text{б) } V_{Oy} = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t)(b \cos^3 t) d(a \sin^3 t) = 124\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cdot \cos^4 t dt =$$

$$= 124\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 t - 2\sin^7 t + \sin^9 t) dt = \frac{32\pi a^2 b}{105} \text{ (куб.ед.)}.$$

$$51. \frac{3\pi^2 a^3}{4} \text{ (куб.ед.)}. \quad 52. \text{ а) } \frac{16}{15} \pi a^3 \text{ (куб.ед.)}; \text{ б) } \frac{\pi^2 a^3}{2} \text{ (куб.ед.)};$$

$$\text{в) } \frac{16}{3} \pi a^3 \text{ (куб.ед.)}; \quad \text{ г) } \frac{16}{3} \pi a^3 \text{ (куб.ед.)}. \quad 53. \text{ а) } \pi^2 a^3 \text{ (куб.ед.)};$$

$$\text{б) } 2\pi a^3 \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right) \text{ (куб.ед.)}; \quad \text{ в) } 3\pi^2 a^3 \text{ (куб.ед.)}. \quad 54. \text{ а) } 4\pi^2 a^3$$

$$\text{(куб.ед.)}; \text{ б) } \frac{128}{15} \pi a^3 \text{ (куб.ед.)}. \quad 55. \text{ а) } \frac{27\pi a^3}{32} \text{ (куб.ед.)}; \text{ б) } \frac{118\sqrt{3}\pi a^3}{35}$$

$$\text{(куб.ед.)}; \quad \text{ в) } \frac{22\sqrt{3}\pi a^3}{7} \text{ (куб.ед.)}. \quad 56. 236\pi a^3/35 \text{ (куб.ед.)}.$$

$$57. 4\pi a^3/21 \text{ (куб.ед.)}. \quad 58. 64\pi a^3/105 \text{ (куб.ед.)}. \quad 59. 2\pi a^3(e^{6\pi} + 1)/111$$

(куб.ед). **60. Решение.** $V_{OP} = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\varphi)^3 \sin \varphi d\varphi =$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \left(-\varphi^3 \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \cos \varphi d\varphi \right) =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \left(\pi^3 + 3 \left(\varphi^2 \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin \varphi d\varphi \right) \right) =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \left(\pi^3 - 6 \left(-\varphi \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \right) =$$

$$= \frac{2\pi^2 a^3}{3} (\pi^2 - 6). \text{ Ответ: } V_{OP} = \frac{2}{3} \pi^2 a^3 (\pi^2 - 6) \text{ (куб.ед).}$$

61. Решение. Пусть P – произвольная точка многогранника S . Тогда шар радиуса r с центром в P содержится в T_r , так что $V(r) \geq \frac{4}{3} \pi r^3$. Пусть наибольшее из расстояний от P до других точек S равно d . Тогда T_r содержится в шаре радиуса $r + d$ с центром в P , так что

$$V(r) \leq \frac{4}{3} \pi (r + d)^3 \text{ и } \frac{4}{3} \pi \leq \frac{V(r)}{r^3} \leq \frac{4}{3} \pi \left(1 + \frac{d}{r} \right)^3,$$

откуда $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{V(r)}{r^3} = \frac{4}{3} \pi$.

§8.

1. $\pi(e^2 - e^{-2} + 4)$ (кв.ед). 2. $\frac{61\pi}{1728}$ (кв.ед). 3. $2\pi \ln \frac{b^2 + \sqrt{1+b^2}}{a^2 + \sqrt{1+a^2}} +$
 $+ 2\pi \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} \right)$ (кв.ед). 4. $10\pi/3$ (кв.ед).
 5. $\pi \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)}{2} \right)$ (кв.ед). 6. $\frac{64\pi}{3}$ (кв.ед).

7. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^\pi - 2)$ (кв.ед). 8. $16\pi a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \right)$ (кв.ед).
 9. $2\pi a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ (кв.ед). 10. $\frac{2\pi a^2}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$ (кв.ед). 11. $\frac{128\pi a^2}{5}$
 (кв.ед).

12. Указание: перейти к новым координатам x_1, y_1 по формулам $x = x_1 \cos \frac{\pi}{4} - y_1 \sin \frac{\pi}{4}$, $y = y_1 \cos \frac{\pi}{4} + x_1 \sin \frac{\pi}{4}$, откуда $x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$, и свести задачу к вычислению площади поверхности, образо-

ванной вращением кривой $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t)$,

$y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin^3 t - \cos^3 t)$ вокруг оси Ox_1 . Ответ: $\frac{3\pi a^2}{5} (4\sqrt{2} - 1)$ (кв.ед).

13. а) $3\pi a^2$; б) $\frac{28\pi a^2 \sqrt{3}}{5}$ (кв.ед). 14. а) $\frac{10}{3} \pi a^2$; б) $\frac{1240}{63} \sqrt{\frac{5}{3}} \pi a^2$

(кв.ед). 15. а) $6\pi a^2$; б) $\frac{816}{35} \sqrt{2} \pi a^2$ (кв.ед). 16. $2\pi b^2 +$

$+ 2\pi ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}$ (кв.ед), где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 17. $2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \times$

$\times \ln \left(\frac{a}{b} (1 + \varepsilon) \right)$ (кв.ед), где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 18. $\pi a^3/3$ (кв.ед).

19. $4\pi^2 ab$ (кв.ед). 20. $14\pi/3$ (кв.ед). 21. а) $\pi a^2 \left(\frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3} \right)$

(кв.ед); б) $4\pi a^2$ (кв.ед). 22. а) $2\pi \left(a^2 + \frac{b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}} \cdot \ln \frac{\sqrt{a^4 - b^4} + a^2}{b^2} \right)$

(кв.ед); б) $2\pi \left(b^2 + \frac{a^4}{\sqrt{a^4 - b^4}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{a^2} \right)$ (кв.ед).

§9.

1. 150 кг. 2. $2\rho_0 l / \pi$. 3. $M_x = a^2(e^2 - e^{-2} + 4)/8$, $I_x = a^3(e - e^{-1}) \times$
 $\times (e^2 + e^{-2} + 10)/24$ 4. $(p^2/8)(\sqrt{2} + 5\ln(1 + \sqrt{2}))$. 5. $M_a = ah^2/6$,
 $I_a = ah^3/12$. 6. $I_x = 1628/105$. 7. $I_x = ab^3/12$, $I_y = a^3b/12$.
8. $I_x = \pi ab^3/4$, $I_y = \pi a^3b/4$. 9. $3RM/16$. 10. $x_c = (a \sin \alpha)/\alpha$, $y_c = 0$.
11. $x_c = 9a/20$, $y_c = 9a/20$. 12. $x_c = 0$, $y_c = 2r/\pi$ (для полуокружно-
сти); $x_c = 0$, $y_c = 4r/(3\pi)$ (для полукруга). 13. $x_c = (\pi - 2)/2$, $y_c = \pi/8$.
14. $x_c = 1$, $y_c = \pi/8$. 15. $x_c = 0$, $y_c = 8/5$. 16. $x_c = y_c = 2a/5$.
17. $x_c = 1$, $y_c = 2/5$. 18. $4\pi^2$ (куб.ед.) 19. $V = \pi r^3(3\pi - 4)/3$ (куб.ед.)
20. Указание: найдите объём тела, полученного вращением треугольника во-
круг основания. 21. Указание: при вращении четверти круга вокруг оси Ox
получим полушар, объём которого равен $V = 2\pi r^3/3$. Согласно второй тео-
реме Гульдина $V = (\pi r^2/4)(2\pi y_c)$, откуда $y_c = 4r/(3\pi)$. Центр тяжести
четверти круга лежит на оси симметрии, т.е. на биссектрисе 1-го координат-
ного угла, а потому $x_c = y_c$. 22. $V = 480$ (куб.ед.). 23.
 $\frac{H}{6}(AB + ab + (A + a)(B + b))$ (куб.ед.) 24. $4\pi R^3/3$ куб.ед. 25. 25 Дж.
26. $2a^3/3$. 27. $\rho g a h^2/3$. 28. $v_0 t - gt^2/2$. 29. 1400 м. 30. $S = 10^4$ (м).
31. 36 м. 32. В точке с абсциссой $x = e^{10}$. 33. $v = \frac{A}{b} \ln\left(\frac{a}{a - bt}\right)$,

$$h = \frac{A}{b^2} \left(bt_1 - (a - bt_1) \ln\left(\frac{a}{a - bt_1}\right) \right).$$

(тяжести) равна весу воды в объёме слоя толщиной dx , т.е. $dF = \pi \rho R^2 dx$,
где ρ – вес единицы объёма воды. Следовательно, элементарная работа силы
 $dA = \pi \rho R^2 (H - x) dx$, где x – уровень воды. Ответ: $A = \pi \rho R^2 H^2/2$.

35. $A = \pi \rho g r^2 h^2/4$. 36. Указание. Кинетическая энергия частицы диска

$$dK = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} d\sigma, \text{ где } d\sigma - \text{элемент площади, } r - \text{расстояние его}$$

от оси вращения, ρ – поверхностная плотность, $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Таким образом,

$$dK = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2} r^2 d\sigma. \text{ Отсюда } K = \frac{M\omega^2}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}.$$

§ 11.

1. Решение. Так как функция $\theta(x)$ постоянна на промежутках $[-1, 0)$ и
 $(0, 2]$, то интеграл $\int_{-1}^2 f(x) d\theta(x)$ можно представить в виде:

$$\int_{-1}^2 f(x) d\theta(x) = f(0)(\theta(0+0) - \theta(0-0)) = f(0) \cdot 1 = f(0).$$

2. Решение. Поскольку функция $|x|$ непрерывно дифференцируема на
промежутках $[-1, 0)$ и $(0, 1]$ и непрерывна в точке $x = 0$, то

$$\int_{-1}^1 x d|x| = \int_{-1}^0 x d(-x) + \int_0^1 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

3. Решение. Пользуясь определением и свойствами интеграла Стильеса,
имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d(e^x \operatorname{sgn}(\sin x)) &= (-\pi+2)(-e^{-\pi}) + \int_{-\pi}^0 (x+2)(-e^x) dx + 4 + \\ &+ \int_0^{\pi} (x+2)e^x dx - (\pi+2)e^{\pi} = (-\pi+2)(-e^{-\pi}) + 4 - (\pi+2)e^{\pi} - \\ &- \int_{-\pi}^0 (x+2)de^x + \int_0^{\pi} (x+2)de^x = (-\pi+2)(-e^{-\pi}) + 4 - (\pi+2)e^{\pi} + \\ &+ (-\pi+2)e^{-\pi} + (\pi+2)e^{\pi} - 4 + \int_{-\pi}^0 e^x dx - \int_0^{\pi} e^x dx = 2 - e^{-\pi} - e^{\pi}. \end{aligned}$$

4. Решение. Имеем:

$$\int_0^{\pi} (x-1) d(\cos x \operatorname{sgn} x) = -1 + \int_0^{\pi} (x-1) d \cos x =$$

$$= -1 - (\pi - 1) + 1 - \int_0^{\pi} \cos x dx = 1 - \pi.$$

5. Решение. Из определения функции $g(x)$ и свойств интеграла Стильеса следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x dg(x) &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sin \pi + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx = \\ &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6. Решение. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1/3}, & \text{если } 0 \leq x < 1/3, \\ 0, & \text{если } 1/3 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{1}{x-2/3}, & \text{если } 2/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ не являются ограниченными на $[0, 1]$, однако для любого размеченного разбиения V сегмента $[0, 1]$, $\Delta_V < \frac{1}{3}$, выполнено: $\sigma_g(V; f) = 0$, следовательно, интеграл $\int_0^1 f(x) dg(x)$ существует и равен 0.

7. Решение. Пусть $g(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$; $f(x) = h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1/2, \\ 1, & x = 1/2. \end{cases}$

Тогда очевидно, что $\int_0^1 f(x) dg(x) = 0$. С другой стороны, $f(x)$ не интегрируема по $h(x)$ на сегменте $[0, 1]$. Действительно, заметим, что для любого $\delta > 0$ найдётся разбиение T этого сегмента, содержащее точку $x_k = \frac{1}{2}$ в качестве одной из точек разбиения и удовлетворяющее условию $\Delta_T < \delta$. Пусть V_1 и V_2 – размеченные разбиения, построенные по разбиению T ; при этом для разбиения V_1 выполнено: $\xi_k = \frac{1}{2}$, $\xi_{k+1} \neq \frac{1}{2}$, а для разбиения V_2 :

$\xi_k \neq \frac{1}{2}$, $\xi_{k+1} = \frac{1}{2}$. Тогда, независимо от выбора остальных точек ξ_j , имеем: $\sigma_h(V_1; f) = 1$, $\sigma_h(V_2; f) = -1$. Это означает, что интеграл Стильеса $\int_0^1 f(x) dh(x)$ не существует.

8. Решение. Пусть $g(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$; $f(x) \equiv 1$ на $[0, 1]$; $h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ Тогда, очевидно,

$$\int_0^1 f(x) dg(x) = 0; \quad \int_0^1 f(x) dh(x) = 1 \cdot f(1) = 1.$$

9. Решение. Пусть $f(x) \equiv 1$ на $[-1, 1]$; $g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ Тогда, очевидно, эти функции удовлетворяют условиям задачи. При этом $f_0(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ и интеграл $\int_0^1 f_0(x) dg(x)$ не существует.

Действительно, рассмотрим разбиение T сегмента $[-1, 1]$, не содержащее в качестве точки разбиения точку 0. Пусть V – произвольное размеченное разбиение, которому соответствует разбиение T . Тогда в интегральной сумме Стильеса $\sigma_g(V; f_0)$ останется лишь одно слагаемое, а именно слагаемое $f_0(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = f_0(\xi_k)$, для которого точка нуль содержится в сегменте $[x_{k-1}, x_k]$. В зависимости от того, будет ли точка ξ_k удовлетворять условию $\xi_k < 0$ или $\xi_k \geq 0$, мы получим, что $\sigma_g(V) = 0$ или $\sigma_g(V) = 1$. Это означает, что не существует предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

10. Решение. Так как функция $g(x)$ не является тождественно постоянной на сегменте $[0, 1]$, то существуют точки $y, z \in [0, 1]$ такие, что $g(y) \neq g(z)$. Пусть $\delta > 0$. Выберем такое разбиение $T = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ сегмента $[0, 1]$, $\Delta_T < \delta$, что $y = x_i$, $z = x_j$ для некоторых i, j от $1 \leq i < j \leq n$.

Пусть теперь

$$V_1 = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}, V_2 = \{x_0; x_1; \dots; x_n; \eta_1; \dots; \eta_n\}$$

– размеченные разбиения, удовлетворяющие следующим условиям: $\xi_k = \eta_k$ при $k \leq i$ и при $k > j$; ξ_k рационально при $i < k \leq j$; η_k иррационально при $i < k \leq j$. Тогда $\sigma_g(V_1; D) = g(z) - g(y)$; $\sigma_g(V_2; D) = 0$, т.е.

$$|\sigma_g(V_1; D) - \sigma_g(V_2; D)| = |g(z) - g(y)| \neq 0.$$

Так как $\delta > 0$ было выбрано произвольно, то это означает, что функция Дирихле не интегрируема на сегменте $[0, 1]$ по функции $g(x)$.

11. Решение. Для любого разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$ и любого выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| V_a^b(g),$$

откуда предельным переходом получаем требуемое неравенство для интеграла.

12. Решение. Так как на любом сегменте приращение каждой из функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ не больше приращения их суммы $g(x)$, то для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ из существования верхней и нижней сумм Дарбу $S_g(T)$ и $s_g(T)$ следует существование $S_{g_k}(T)$ и $s_{g_k}(T)$, $k = 1, 2$, причём

$$S_g(T) - s_g(T) \geq S_{g_k}(T) - s_{g_k}(T).$$

Из последнего неравенства и теоремы 2 пункта 11.3 сразу следует утверждение задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Признак Дирихле

Теорема (Признак Дирихле). Пусть при любом числе

$$x \in [a, +\infty) \text{ первообразная } F(x) = \int_a^x f(u) du \text{ ограниче-}$$

на, и пусть функция $g(x)$ неотрицательна и, не возрастаая, стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Вот Интеграл. Увы, Несобственный.

Из рода Первых, рас в бесечности.

Он в будни сходится, как Собственный,

А в праздник – рвётся к бесконечности.

Черты двух функций обезличены,

Одна из них печально-грустная:

Первообразной ограниченность –

Что стал в неделю масонустную.

С другою, далг вернувши картоный,

К нулю финансову тащима...

По Дирихле, того достаточно,

Чтоб видеть Интеграл – сходящимся.

Предметный указатель

А

Аддитивность:

- интеграла Лебега 382
- интеграла Римана 34
- интеграла Стильеса 395
- несобственного интеграла 140
- объёма тела 268
- площади плоской фигуры 191, 192

Абсолютная интегрируемость:

- интеграл Лебега 382
- интеграл Римана 55
- несобственный интеграл 142, 174

Абсолютная сходимость 174

Алгебраические поверхности 318

Б

Бета-функция 102, 184

В

Взаимно обратные функции 111

Взаимно однозначное соответствие 370

Внешняя точка множества 190, 264

Внутренняя точка множества 190, 264

Второй признак сравнения 157

Выпуклые функции 70

Г

Гамма-функция 184

Гиперболические функции 82

Главное значение несобственного интеграла (по Коши) 130

Гладкая кривая 198

Гладкая поверхность 267, 315

Граница 190, 264

Граничная точка множества 190, 264

Д

Дарбу суммы, интегралы 18

Диаметр разбиения 14

Дирихле интеграл 184

Длина дуги кривой 236

– неявное задание 253, 259

– параметрический случай 238, 258

– явное задание 251, 255

З

Замена переменной 89, 149

Замкнутое множество 190, 372

И

Измеримое множество 374

Измеримые функции 376

Интеграл:

- Лебега 379
- Римана 14
- Стильеса 390

Интеграл с переменными пределами 35, 39, 145

Интегральная сумма:

- Лебега 381
- Римана 14
- Стильеса 390

К

Квадрируемая поверхность 320

Квадрируемая фигура 192

Кратная точка 231, 314

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла 136

Критерий интегрируемости функций:

- Лебега 27
- Римана 22

Кубируемое тело 267

Кусочно-гладкая кривая 209

Кусочно-непрерывная функция 37

М

Масса кривой 346

Мера множества 372

Мера Лебега 374

Метод интегрирования:

- заменой переменной 89, 149
- по частям 99, 150, 397

Множество меры нуль:

- по Жордану, Лебегу 25, 27, 375

Н

Необходимое условие интегрируемости (по Риману) 16

Необходимое и достаточное условие интегрируемости (по Риману) 23

Неравенство Гёльдера 68

Неравенство Коши 67, 383

Неравенство Коши–Буняковского 65, 383

Неравенство Минковского 68

Несобственные интегралы:

- 1-го рода, определение 123
- 2-го рода, определение 126
- свойства 138

О

Объём тела 268

Объём тела вращения:

- вокруг оси Ox 278, 299
- вокруг оси Oy 289, 302
- вокруг произвольной оси 296, 305

Ограниченное множество 190, 264

Односвязная область 265, 320

$\mathcal{E}$ -окрестность точки 190, 264

Основная теорема интегрального исчисления 38

Особые точки 124, 126

Открытое множество 190, 372

П

Параметризуемая кривая 233

Первообразная 37

Первый признак сравнения 157

Периодические функции 108, 144

Плоская кривая 231, фигура 191

Площадь плоской фигуры 191

- неявное задание 212, 225
- параметрический случай 207, 224
- явное задание 198, 217

Площадь поверхности 320, 321

Площадь поверхности вращения:

- вокруг оси Ox 322, 338
- вокруг оси Oy 330, 340
- вокруг произвольной оси 333, 340

Признак Абеля 168

Признак Дирихле 165

Признак Коши 169

Признаки сходимости 154, 157, 162

С

Спряmlяемая кривая 235

Среднее значение:

- функции 60, 129
- несобственного интеграла 135

Статические моменты и моменты инерции:

- плоской кривой 347
- плоской фигуры 353

Сходимость несобственного интеграла 123, 126, 153

- в смысле главного значения (по Коши) 130, 132

Счётные множества 371

Т

Тело вращения 265

Теорема Лузина 378

Теорема сравнения 154

Теоремы Гульдина 351, 357

Теоремы о среднем:

- интеграл несобственный 146
- интеграл Римана 57, 62
- интеграл Стильеса 398

Третий признак сравнения 162

У

Условие Липшица 28

Ф

Формула Ньютона–Лейбница 38, 80, 147

Формула понижения степени 103, 153

Функции с ограниченным изменением 387

Ц

Центр тяжести 349, 355

Цилиндр 266

Э

Эйлера–Пуассона, Эйлера интегралы 183, 184

Эллиптические интегралы 255

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу: Учебник для университетов и пед. вузов /Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 1999. – 695с.
2. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов./ Под ред. Садовничего В.А. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк. 2000. – 725с.: ил.
3. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: IX–X классы. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 351с., ил.
4. *Гусак А.А.* Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения./ Мн.: ТетраСистемс, 1998. –416с.
5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1/ Учеб. пособие для втузов. –5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304с.
6. *Действительный анализ в задачах./* Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. –М.: Физматлит, 2005.–416с.
7. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. /СПб: Мифрил, 1995. –489с.
8. *Задачи студенческих олимпиад по математике: Пособие для студентов вузов/* Садовничий В.А., Подколзин А.С. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2003. – 208с.: ил.
9. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. /Под ред. Тихонова А.Н. – 2-е изд., – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 662с.
10. *Калинин С.И., Канин Е.С. и др.* Задачи и упражнения по началам математического анализа. Пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики и для внеклассных занятий математикой. 2-е изд., – М., Московский Лицей, 2002. – 208с.
11. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 656 с.
12. *Математика. Большой энциклопедический словарь.* /Под ред. Прохорова Ю.В. – 3-е изд. – М.: «Большая Российская энциклопедия», 2000. – 848с.: ил.
13. *Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие/* Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Под ред. Бутузова В.Ф.–4-е изд., исправ.–М.: Физ.-мат. лит-ра, 2001. –480с.
14. *Райхмист Р.Б.* Графики функций: задачи и упражнения. М.: Школа-Пресс, 1997. 384с.
15. *Справочное пособие по математическому анализу. Часть 1./* Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. – Киев: Вища школа, 1978. – 696с.
16. *Хорошилова Е.В.* Математический анализ: неопределённый интеграл (в помощь практическим занятиям): Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: Изд. отдел ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2007. – 184с.
17. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II./М.: Наука, Глав.ред. физ.-мат. лит-ры, 1969. –800с., ил.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III./М.: Наука, Глав.ред. физ.-мат. лит-ры, 1969. –656с., ил.
19. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I./М.: Наука, Глав.ред. физ.-мат. лит-ры, 1962. –607с., ил.

Учебное издание

САДОВНИЧАЯ Инна Викторовна,
ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

О П Р Е Д Е Л Ё Н Н Ы Й И Н Т Е Г Р А Л:
Теория и практика вычислений

*Учебное пособие
для студентов университетов*

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
Лицензия ИД №05899 от 24.09.01 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус

Напечатано с готового оригинал-макета

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99 г.

Подписано к печати 17.07.2008 г.

Печать офсетная. Формат 60х90 1/16. Усл. печ. л. 33,0. Тираж 750 экз. Изд. №406.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 627 к.
Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891.

Типография МГУ
119991, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр. 15
Заказ №1674